Realschulabschluss

an

Waldorfschulen

Prüfung 2013

Prüfung 2013

Pflichtbereich

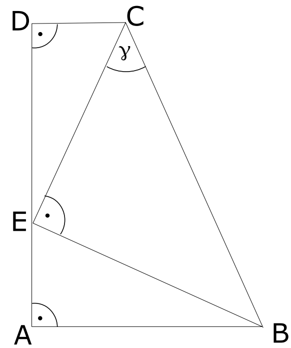
Aufgabe P 1:

(4 P)

Im Trapez ABCD gilt:

$\overline{AB} = 5{,}2$ cm
$\overline{BC} = 7{,}1$ cm
$\gamma = 50{,}5°$

Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AD}$.



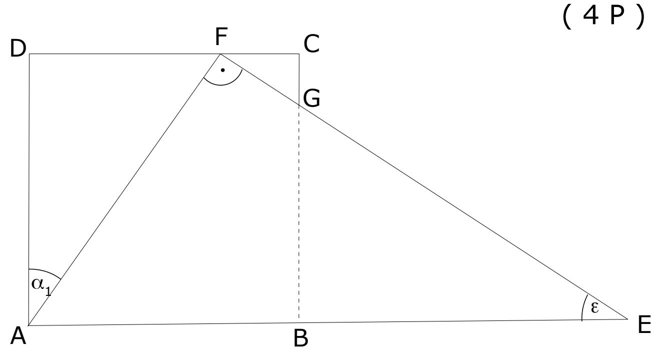
Aufgabe P 2:

(4 P)

Das rechtwinklige Dreieck AEF überdeckt das Quadrat ABCD teilweise.

Es gilt:
$\overline{AD} = 5{,}0$ cm
$\alpha_1 = 34{,}0°$

Berechnen Sie den Winkel ε und die Länge von $\overline{EG}$.



Aufgabe P 3:

Lösen Sie die Gleichung:

(3,5 P)

$$(3x+1)^2 + x(5-4x) = \left(\frac{1}{2}x-1\right)(6x+2)-11$$

Aufgabe P 4:

Eine Parabel p mit der Gleichung $y=x^2+4x+q$ geht durch den Punkt A(-3|-4). Der Punkt B(1|y_B) liegt ebenfalls auf der Parabel p. (3,5 P)
Berechnen Sie die y-Koordinate des Punktes B.
Die Gerade g geht durch den Scheitelpunkt S von p und durch den Punkt B.
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g.

Aufgabe P 5:

Eine Funktion f hat die Gleichung: (7,5 P)

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{4}{3}x + 5$$

Ihr Schaubild sei K_f.

Berechnen Sie die Funktionswerte für alle ganzzahligen Werte von x im Bereich $-2 \leqslant x \leqslant 4$.

Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte von K_f.

Untersuchen Sie diese Punkte auf Hoch- und Tiefpunkte.

Tragen Sie die berechneten Werte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein und zeichnen Sie K_f (1 LE = 1 cm).

Aufgabe P 6:

(7,5 P)

Die Gerade g_1 geht durch den Punkt B(5,5|-0,5) und Q(5|1).

Die Gerade g_2 hat die Gleichung $y=2x-4$.

Die Gerade g_3 geht durch den Punkt A(-0,5|-5) und ist rechtwinklig zur Geraden $h: y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{2}$

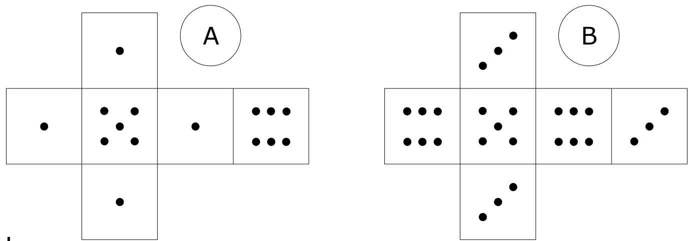
Zeichnen Sie die Geraden in ein rechtwinkliges Koordinatensystem (1LE=1cm) ein.
Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden g_1 und g_3.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes C von g_1 und g_2.
Zeigen Sie, dass der Punkt A auf g_2 liegt.
Um wie viel Prozent ist die Strecke $\overline{AB}$ länger als der Abstand von Punkt B zur y-Achse?

Wahlbereich

Aufgabe W 1:

a) Die beiden Netze zeigen die Augenzahlen zweier besonderer Spielwürfel. (6 P)

Beide Würfel werden gleichzeitig geworfen.



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine „Sechs“ zu werfen?

Die beiden Würfel werden für ein Glücksspiel eingesetzt.

Dazu wird nebenstehender Gewinnplan geprüft.

Würfelergebnisse	Gewinn
gleiche Augenzahl (Pasch)	9,00 €
verschiedene Augenzahlen	kein Gewinn
Einsatz pro Spiel:	1,00 €

Berechnen Sie den Erwartungswert.

Der Veranstalter des Glücksspiels möchte beim Würfelnetz A die „Fünf“ durch eine „Sechs“ ersetzen. Der Gewinnplan soll gleich bleiben.

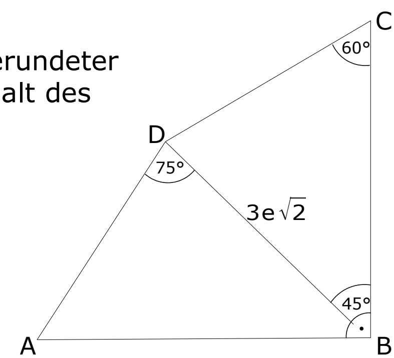
Wäre dies für ihn vorteilhaft? Begründen Sie.

b) Gegeben ist das Viereck ABCD. (4 P)

Weisen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte nach, dass der Flächeninhalt des Vierecks ABCD mit der Formel

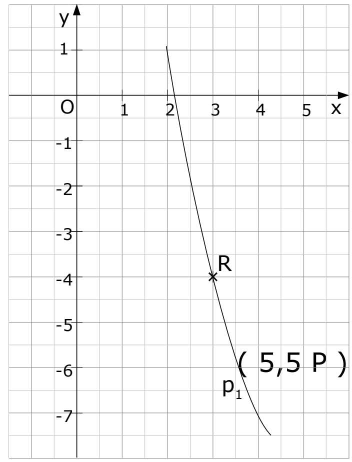
$$A = 3e^2\left(3+\sqrt{3}\right)$$

gerechnet werden kann.



Aufgabe W 2:

a) Das Schaubild zeigt einen Ausschnitt einer verschobenen Normalparabel p_1. Der Punkt R liegt auf p_1. (5 P)



Die unvollständig ausgefüllte Wertetabelle gehört zur Normalparabel p_1.

x	3	4	5	6	7	8	9
y					-4		

Geben Sie die Funktionsgleichung der Parabel an und füllen Sie die Wertetabelle vollständig aus.

Die Parabel p_2 hat die Gleichung $y=-x^2-4$.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass die beiden Parabeln keinen gemeinsamen Punkt haben.

(5,5 P)

Geben Sie die Gleichung einer Geraden an, die keinen gemeinsamen Punkt mit den beiden Parabeln hat.

b) Die Parabel p_1 hat die Gleichung $y = -\frac{1}{2}x^2+5$ (5 P)

Die nach oben geöffneten und verschobene Normalparabel p_2 hat den Scheitel $S_2(3|-4)$.
Der Scheitel S_1 von p_1 sowie die Schnittpunkte N_1 und N_2 von p_2 mit der x-Achse bilden ein Dreieck.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $N_1N_2S_1$.

Eine Gerade g geht durch die Schnittpunkte der beiden Parabeln und teilt somit die Fläche des Dreiecks.

Überprüfen Sie, ob die Gerade g die Fläche des Dreiecks $N_1N_2S_1$ halbiert.

Aufgabe W 3:

a) Gegeben ist die Funktionsgleichung von Aufgabe 5 des Pflichtbereichs:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{4}{3}x + 5$$

Die Gerade g verläuft parallel zur x-Achse und geht durch den Schnittpunkt von K_f mit der y-Achse. Sie schneidet K_f in den Schnittpunkten $S_1(x_1|y_1)$, $S_2(x_2|y_2)$ und $S_3(x_3|y_3)$ mit $x_1<x_2<x_3$. (6,5 P)

Berechnen Sie die Koordinaten dieser Schnittpunkte.

Die Gerade w geht durch S_3 und den Wendepunkte W von K_f.
Zeigen Sie, dass die Gerade w durch den Punkt P(-2|1) von K_f geht.

Die Gerade t ist die Tangente an K_f im Berührpunkte P.
Sie schneidet die Gerade g im Punkt R.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks RPS_3.

b) Gegeben sind die Gerade mit der Gleichung $x=u$ mit $-2<u<1$.
Das Schaubild K_f und die Gerade w schneiden aus diesen Geraden die Strecken d(u) aus. (3,5 P)

Für welchen Wert von u wird diese Strecke am größten?

Wie lang ist diese maximale Strecke?

Aufgabe W 4:

a) Gegeben sind die Punkte A, B und C der Aufgabe P6 des Pflichtbereichs sowie der Punkt D(-0,5|2,5). (6,5 P)

Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Drachen ist.

Zeigen Sie, dass der Drachen einen rechten Winkel hat und berechnen Sie die Innenwinkel.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Drachens.

b) Gegeben ist die Geradenschar $h_k : y = 2kx-5k+1$ und der Punkt M(2,5|1). (3,5 P)

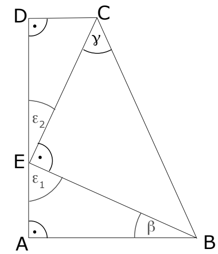
Zeigen Sie, dass der Punkt M auf allen Geraden dieser Schar liegt.

Berechnen Sie den x-Wert des Schnittpunktes S_k von h_k mit der ersten Winkelhalbierenden.

Für welchen Wert von k liegt der Punkt S_k auf der Geraden x=4?

Tipps und Ergebnisse:

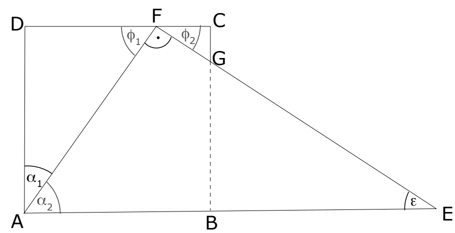
Tipps zu P1:



-Im Dreieck BCE über $\overline{BC}$ und γ: $\overline{BE}$ und $\overline{CE}$ berechnen.
-Im Dreieck ABE über $\overline{BE}$ und $\overline{AB}$: $\overline{AE}$ und ε_1 berechnen.
-ε_2 über ε_1 berechnen
-Im Dreieck CDE über ε_2 und $\overline{CE}$: $\overline{DE}$ errechnen.
-$\overline{AD}$ über $\overline{AE}$ und $\overline{DE}$ berechnen.

Ergebnisse in Kurzformat: $\overline{BE}=5,48$ $\overline{CE}=4,51$ $\overline{AE}=1,73$
$\varepsilon_1=71,62$ $\varepsilon_2=18,38$ $\overline{DE}=4,28$ $\overline{AD}=6,01$

Tipps zu P2:



-Im Dreieck AFD über $\overline{AD}$ und α_1:
$\overline{AF}$, $\overline{DF}$ und ϕ_1 berechnen.
-α_2 über α_1 berechnen.
-ϕ_2 über ϕ_1 berechnen.
-Im Dreieck AEF über $\overline{AF}$ und α_2 :
Berechnen von ε und $\overline{EF}$.
-$\overline{FC}$ über $\overline{DF}$ und $\overline{CD}$ berechnen [$\overline{CD}=\overline{AD}$!].
-Im Dreieck CFG über $\overline{FC}$ und ϕ_2: $\overline{FG}$ berechnen.
-$\overline{EG}$ über $\overline{EF}$ und $\overline{FG}$ berechnen.

Ergebnisse in Kurzformat: $\overline{AF}=6,03$ $\overline{DF}=3,37$ $\phi_1=34,0$ $\alpha_2=56,0$ $\varepsilon=34,0$
$\overline{EF}=8,94$ $\overline{FC}=1,63$ $\overline{FG}=1,97$ $\overline{EG}=6,97$

Tipps zu P3:

-Alle Klammern auflösen, alles auf eine Seite bringen.
-Mitternachtsformel (p-q-Formel oder a-b-c-Formel).

Ergebnisse in Kurzformat: L = { -1 ; -7 }

Tipps zu P4:

-Koordinaten von A in Parabelgleichung einsetzen, um q zu erhalten.
-Koordinaten von B in Parabelgleichung einsetzen, um y_B zu erhalten.
-Scheitelpunkt von Parabel p bestimmen [entweder über quadratische Ergänzung oder Ableitung der Parabel Null setzen].
-Gleichung von g bestimmen über ZPF mit S und B.

Ergebnisse in Kurzformat: q=-1 y_B=4 S(-2|-5) g:y=3x+1

Tipps zu P5:

-Die x-Werte der Extrema erhält man, indem man die erste Ableitung Null setzt.
Die y-Werte erhält man durch Einsetzen von x in f(x).
-Ob´s ein Hoch- oder Tiefpunkt ist, erhält man, indem man die x-Werte in die zweite Ableitung einsetzt. [Ist das Ergebnis negativ, so ist´s ein Hochpunkt und umgekehrt].

Ergebnisse in Kurzformat:

Wertetabelle:	-2	-1	0	1	2	3	4
	1	5	5	3	1	1	5

HP(-0,53 | 5,38)
TP(2,53 | 0,62)

Tipps zu P6:

-Zeichnen: Blatt, Geodreieck, Stift greifen. Punkte einzeichnen und verbinden...

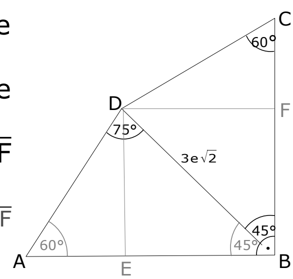
-Die Gerade g_1 über ZPF berechnen [mit Punkt B und Q].
-Die Gerade g_3 über PSF berechnen [die Steigung von g_3 ist der negative Kehrwert der Steigung von h].
-Den Schnittpunkt C erhält man durch Gleichsetzen von g_1 und g_2 ($g_1=g_2$).
-A liegt auf g_2, wenn die Punktprobe stimmt [x- und y-Wert von A in g_2 einsetzen].
-Die Strecke $\overline{AB}$ erhält man über die Abstandformel [=Entfernungsformel], der Abstand von B zur y-Achse ist der x-Wert. Mit Dreisatz [oder Ähnlichem] den proz. Unterschied berechnen.

Ergebnisse in Kurzformat: g_1:y=-3x+16 g_3:$y=\frac{3}{4}x-\frac{37}{8}$ C(4|4), proz.Unterschied ist 36,36%

Tipps zu W1 a)
-Die W.S. mindestens eine „Sechs" zu erhalten, berechnet man am einfachsten über das Gegenereignis. Das Gegenereignis ist: „keine Sechs". Der Rest der W.S. bis 100% ist das gesuchte Ergebnis.
-Der Erwartungswert des Gewinns wird berechnet, indem man die Werte des Gewinns mit ihren Wahrscheinlichkeit multipliziert. Nun hat man die durchschnittliche Auszahlungen. Davon zieht man den Einsatz von 1,-€ ab.
Je nach Vorzeichen vom Ergebnis, ist das Spiel vorteilhaft oder nicht.

Ergebnisse in Kurzformat: W.S. für mindestens eine „Sechs" ist 44,4%. Der Erwartungswert ist -0,25 (der Spieler verliert). Nach Ersetzen der „Fünf" durch die „Sechs" ist der Erwartungswert 0. Die Abänderung ist für den Veranstalter nicht vorteilhaft.

Tipps zu W1 b)



-Da nirgends rechte Winkel auftauchen, legt man eine waagerechte und eine senkrechte Hilfslinie durch D.
Nun erkennt man [nach ein bisschen nachdenken] ganz viele gleiche Strecken und Winkel.
-Im Dreieck BFD über $\overline{BD}$ und den 45°-Winkel: $\overline{BF}$ und $\overline{DF}$ berechnen. Damit hat man auch $\overline{BE}$ und $\overline{DE}$.
-Im Dreieck FCD kann man $\overline{CF}$ und $\overline{CD}$ berechnen [über $\overline{DF}$ und den 60°-Winkel]. Damit hat man auch $\overline{AE}$ und $\overline{AD}$.
-Nun kann man die Fläche vom Dreieck ABD berechnen
Die Fläche von ABCD ist doppelt so groß.

Ergebnisse in Kurzformat: $\overline{BF}=\overline{BE}=\overline{DF}=\overline{DE}=3e$ $\overline{CF}=\overline{AE}=e\sqrt{3}$ $A=3e^2(3+\sqrt{3})$

Tipps zu W2 a)
-Eine verschobene Normalparabel hat die Form $y=x^2+px+q$.
Setzt man die Koordinaten der beiden Punkte ein [R(3|-4) aus Skizze und P(7|-4) aus WT], so erhält man die Parabelgleichung. Mit dieser kann man auch die Wertetabelle vervollständigen.
-Die beiden Parabeln haben keinen Schnittpunkt, wenn man sie gleichsetzt und keine Lösung für „x" rauskommt.
-Die Gleichung einer Geraden, die keinen gemeinsamen Punkt mit den Parabeln hat: hier ist keine eindeutige mathematische Lösung möglich. Man zeichnet am besten die zweite Parabel $y=-x^2-4$ ins Koordinatensystem ein, und dann skizziert man [irgendeine!] Gerade zwischen die Parabeln, die keine von beiden schneidet. Zum Schluss liest man die Geradengleichung ab und ist fertig.

Ergebnisse in Kurzformat: $p_1: y=x^2-10x+17$

Wertetabelle:	3	4	5	6	7	8	9
	-4	-7	-8	-7	-4	1	8

Gerade: es gibt sehr, sehr viele Möglichkeiten. Wenn der y-Achsenabschnitt Ihrer Lösung ca. zwischen -3 und 17 liegt und die Steigung Ihrer Gerade ca. zwischen -0,5 und -5 liegt, dann wird Ihre Geradengleichung vermutlich stimmen.

Tipps zu W2 b)

-Von p_2 ist der Scheitelpunkt S_2 gegeben. Mit S_2 die Scheitelform von p_2 aufstellen und in Normalform umwandeln.

-p_2 mit der x-Achse schneiden, um die Koordinaten von N_1 und N_2 zu bestimmen.

-Den Scheitelpunkt von p_1 ablesen [einfach, da p_1 symmetrisch zur y-Achse liegt]

-Den Flächeninhalt des Dreiecks $N_1N_2S_1$ über $A=½\cdot g\cdot h$ bestimmen. [Die Länge der Grundlinie kann man einfach ablesen, die Höhe ist der y-Wert von S_1]

-Schnittpunkte der beiden Parabeln p_1 und p_2 berechnen [gleichsetzen]

-Die Gleichung der Geraden g bestimmen, in dem man mit den beiden eben errechneten Schnittpunkten die ZPF anwendet.

-Würde die Gerade g die Fläche halbieren, müsste sie auch die Grundfläche halbieren. Dieses prüft man nach.

Ergebnisse in Kurzformat: $p_2: y=x^2-6x+5$ $S_1(0|5)$ $N_1(1|0)$ $N_2(5|0)$ $A_{\Delta N1N2S1}=10$
$g: y=-2x+5$ g halbiert die Dreiecksfläche nicht.

Tipps zu W3 a)

-g bestimmen: Parallelen zur x-Achse haben die Gleichung y=c. Hier den Schnittpunkt von K_f mit der y-Achse einsetzen, nun g mit K_f schneiden [gleichsetzen] und die drei Schnittpunkte berechnen.

-Den Wendepunkt von K_f berechnen [$f''(x)=0$], aus diesem Wendepunkt und S_3 die Gleichung der Geraden w bestimmen [über ZPF]. Die Punktprobe von Punkt P mit der Geraden w liefert eine wahre Aussage, also liegt P auf w.

-t ist Tangente. Also die Tangentengleichung berechnen [die Steigung erhält man, wenn man den x-Wert von P in die erste Ableitung einsetzt, der Berührpunkt der Tangente ist P. Beides in die PSF einsetzen.] Nun kann man den Schnittpunkt der Tangente t mit der Geraden g bestimmen [gleichsetzen], das ist dann R.

-Die Fläche des Dreiecks RPS_3 über die lange Flächeninhaltsformel oder über $A=½\cdot g\cdot h$ berechnen.

Ergebnisse in Kurzformat: $g: y=5$ $S_1(-1|5)$ $S_2(0|5)$ $S_3(4|5)$ $W(1|3)$ $d(u)=\frac{1}{3}u^3-u^2-2u+\frac{8}{3}$
$t: y=\frac{20}{3}x+\frac{43}{3}$ $R(-1{,}4|5)$ $A_{\Delta RPS3}=10{,}8$

Tipps zu W3 b)

-d(u) ist die Differenz von K_f und w. [Man zieht also die Funktionen Kf und w von einander ab und nennt die Variable nicht mehr „x“ sondern „u“].

-Man bestimmt das Maximum von d(u), in dem man die Ableitung von d(u) Null setzt. x-Wert und y-Wert des Maximums sind gefragt.

Ergebnisse in Kurzformat: $d(u)=\frac{1}{3}u^3-u^2-2u+\frac{8}{3}$ Maximum bei u=-0,73

längste Strecke: $d_{max}=3{,}46$

Tipps zu W4 a)

-Ein Viereck ist ein Drachen, wenn je zwei nebeneinander liegende Seiten gleiche Länge haben. Also vier mal Entfernungsformel anwenden.

-Aus Skizze ablesen, dass der rechte Winkel bei C liegen könnte. Steigungen von BC und CD bestimmen. Nun entweder zeigen, dass die Steigungen der negative Kehrwert voneinander sind, oder über Schnittwinkelformel den Schnittpunkt errechnen.

-Für die Innenwinkel, braucht man noch einen zweiten Winkel [zwei Winkel sind im Drachen aus Symmetriegründen immer gleich]. Diesen berechnet man über die Schnittwinkelformel. Über die Winkelsumme erhält man nun alle vier Winkel.

-Den Flächeninhalt des Drachens berechnet man am besten über $A=\frac{1}{2}\cdot e\cdot f$. e und f sind die Diagonalen, deren Länge man über die Entfernungsformel berechnet.

Ergebnisse in Kurzformat: $|AB|=|AD|=7{,}5$ $|BC|=|CD|=\sqrt{22{,}5}$. $\alpha=53{,}14°$ $\beta=\delta=108{,}43°$ $\gamma=90°$ $A_{ABCD}=33{,}75$.

Tipps zu W4 b)

-Koordinaten von M in die Geradenschar einsetzen. Man erhält eine wahre Aussage.

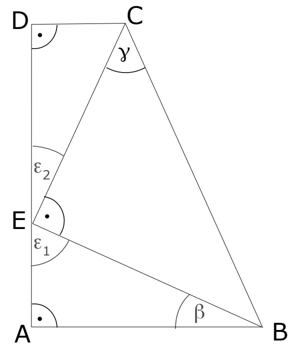
-Die erste Winkelhalbierende ist „y=x". Diese mit h_k gleichsetzen und nach „x" auflösen.

-Den eben erhaltenen x-Wert gleich 4 setzen und nach „k" auflösen.

Ergebnisse in Kurzformat: $x=\frac{5k-1}{2k-1}$ $k=1$.

Ausführliche Lösung:

Lösung von P1



Es gibt ein einziges Dreieck, in welchem wir zwei Angaben [plus rechter Winkel] haben: das Dreieck BCE.
Daher beginnen wir im Dreieck BCE.

ΔBCE:

Bestimmung von $\overline{BE}$:

$$\sin(\gamma) = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} \qquad | \cdot \overline{BC}$$

$$\Rightarrow \overline{BE} = \sin(\gamma)\cdot\overline{BC} = \sin(50{,}5°)\cdot 7{,}1 \approx 5{,}48$$

Bestimmung von $\overline{EC}$:

$$\overline{EC}^2+\overline{BE}^2 = \overline{BC}^2$$

$$\Rightarrow \overline{EC} = \sqrt{\overline{BC}^2-\overline{BE}^2} = \sqrt{7{,}1^2-5{,}48^2} \approx 4{,}51$$

$\Rightarrow \overline{BE} = 5{,}48$ [cm]

$\Rightarrow \overline{EC} = 4{,}51$ [cm]

ΔABE:

Bestimmung von $\overline{AE}$:

$$\overline{AE}^2+\overline{AB}^2 = \overline{BE}^2$$

$$\Rightarrow \overline{AE} = \sqrt{\overline{BE}^2-\overline{AB}^2} = \sqrt{5{,}48^2-5{,}2^2} \approx 1{,}73 \qquad \Rightarrow \overline{AE} = 1{,}73 \text{ [cm]}$$

Bestimmung von ε_1: [es gibt jetzt mehrere Wege ε_1 zu berechnen]

$$\tan(\varepsilon_1) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{5{,}2}{1{,}73} \approx 3{,}01 \Rightarrow \varepsilon_1 = \tan^{-1}(3{,}01) \approx 71{,}62 \qquad \Rightarrow \varepsilon_1 = 71{,}62°$$

Bestimmung von ε_2:

$$\varepsilon_2 = 180°-90°-\varepsilon_1 = 180°-90°-71{,}62° = 18{,}38° \qquad \Rightarrow \varepsilon_2 = 18{,}38°$$

ΔCDE:

Bestimmung von $\overline{DE}$:

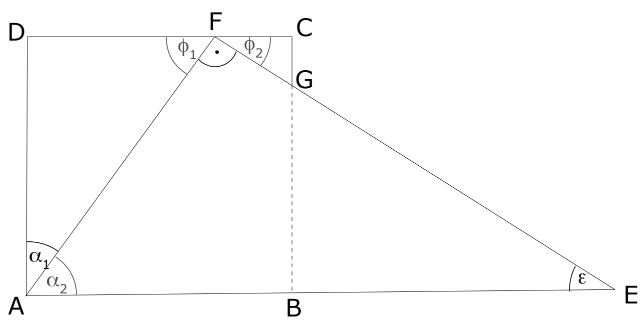
$$\cos(\varepsilon_2) = \frac{\overline{DE}}{\overline{EC}} \qquad | \cdot \overline{EC}$$

$$\Rightarrow \overline{DE} = \cos(\varepsilon_2)\cdot\overline{EC} = \cos(18{,}38°)\cdot 4{,}51 \approx 4{,}28 \qquad \Rightarrow \overline{DE} = 4{,}28 \text{ [cm]}$$

Bestimmung von $\overline{AD}$:

$$\overline{AD} = \overline{AE}+\overline{DE} = 1{,}73+4{,}28 = 6{,}01 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{\overline{AD} = 6{,}01 \text{ [cm]}}$$

Lösung von P2



Im rechtwinkligen Dreieck AFD kennen wir zwei Angaben.
Wir beginnen also hier.

ΔAFD:

Bestimmung von $\overline{AF}$:

$$\cos(\alpha_1) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} \qquad | \cdot \overline{AF}$$

$$\overline{AF}\cdot\cos(\alpha_1) = \overline{AD} \qquad | : \cos(\alpha_1)$$

$$\overline{AF} = \frac{\overline{AD}}{\cos(\alpha_1)} = \frac{5{,}0}{\cos(34{,}0)} \approx 6{,}03$$

Bestimmung von $\overline{DF}$: $\qquad \Rightarrow \overline{AF} = 6{,}03$ [cm]

$$\overline{DF}^2+\overline{AD}^2 = \overline{AF}^2$$

$$\Rightarrow \overline{DF} = \sqrt{\overline{AF}^2-\overline{AD}^2} = \sqrt{6{,}03^2-5{,}0^2} \approx 3{,}37 \qquad \Rightarrow \overline{DF} = 3{,}37 \text{ [cm]}$$

Bestimmung von ϕ_1:

$\phi_1 = 180°-90°-\alpha_1 = 180°-90°-34{,}0° = 56{,}0°$ $\Rightarrow$ $\phi_1 = 56{,}0°$

Bestimmung von ϕ_2:

$\phi_2 = 180°-90°-\phi_1 = 180°-90°-56{,}0° = 34{,}0°$ $\Rightarrow$ $\phi_2 = 34{,}0°$

Bestimmung von α_2:

$\alpha_2 = 90°-\alpha_1 = 90°-34{,}0° = 56{,}0°$ $\Rightarrow$ $\alpha_2 = 56{,}0°$

ΔAEF:

Bestimmung von $\overline{EF}$:

$\tan(\alpha_2) = \frac{\overline{EF}}{\overline{AF}}$ $\quad | \cdot \overline{AF}$

$\overline{EF} = \overline{AF} \cdot \tan(\alpha_2) = 6{,}03 \cdot \tan(56{,}0) \approx 8{,}94$ $\Rightarrow$ $\overline{EF} = 8{,}94$ [cm]

Bestimmung von ε:

$\varepsilon = 180°-90°-\alpha_2 = 180°-90°-56{,}0° = 34{,}0°$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\varepsilon = 34{,}0°}$

Bestimmung von $\overline{FC}$:

$\overline{FC} = \overline{CD}-\overline{DF} = \overline{AD}-\overline{DF} = 5{,}0-3{,}37 = 1{,}63$ $\Rightarrow$ $\overline{FC} = 1{,}63$ [cm]

ΔCFG:

Bestimmung von $\overline{FG}$:

$\cos(\phi_2) = \frac{\overline{FC}}{\overline{FG}}$ $\quad | \cdot \overline{FG} \quad | : \cos(\phi_2)$

$\overline{FG} = \frac{\overline{FC}}{\cos(\phi_2)} = \frac{1{,}63}{\cos(34{,}0)} \approx 1{,}97$ $\Rightarrow$ $\overline{FG} = 1{,}97$ [cm]

Bestimmung von $\overline{EG}$:

$\overline{EG} = \overline{EF}-\overline{FG} = 8{,}94-1{,}97 = 6{,}97$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\overline{EG} = 6{,}97}$ **[cm]**

Lösung von P3

$(3x+1)^2+x(5-4x) = (\frac{1}{2}x-1)(6x+2)-11$ alle Klammern auflösen

$9x^2+6x+1 + 5x-4x^2 = 3x^2+x-6x-2 - 11$ zusammenfassen

$5x^2+11x+1 = 3x^2-5x-13 \quad |-3x^2+5x+13$

$2x^2+16x+14 = 0$

(p-q-Formel)

$2x^2+16x+14=0 \quad |:2$

$x^2+8x+7 = 0$

$x_{1,2}=-4\pm\sqrt{4^2-7} =$

$= -4\pm\sqrt{9} =$

$= -4\pm 3$

(a-b-c-Formel)

$2x^2+16x+14=0$

$x_{1,2}=\frac{-16\pm\sqrt{16^2-4\cdot 2\cdot 14}}{2\cdot 2}$

$= \frac{-16\pm\sqrt{144}}{4}$

$= \frac{-16\pm 12}{4} =$

$x_1=-1 \quad x_2=-7$

$\Rightarrow$ **L = { -1 ; -7 }**

Sie sollten natürlich nur den Weg *entweder* über p-q-Formel *oder* über a-b-c-Formel rechnen.

Lösung von P4

Da die Parabel durch den Punkt A geht, kann man die Koordinaten von A in die Parabelgleichung einsetzen.

$y = x^2+4x+q$ $\quad$ $x_A=-3$ und $y_A=-4$ für x und y einsetzen

$-4 = (-3)^2+4\cdot(-3)+q$ $\quad$ zusammenfassen

$-4 = 9-12+q \quad \Rightarrow \quad -4=-3+q \quad \Rightarrow \quad q=-1 \quad \Rightarrow \quad$ $\underline{p : y=x^2+4x-1}$

Der Punkt $B(1|y_B)$ liegt ebenfalls auf der Parabel, also kann man die Koordinaten von B in die Parabelgleichung einsetzen.

$y = x^2+4x-1$ $\quad$ $x_B=1$ und y_B für x und y einsetzen

$y_B = 1^2+4\cdot1-1 = 4 \quad \Rightarrow$ $\quad$ **B(1 | 4)**

Einen Scheitelpunkt der Parabel kann man über die Methode der quadratischen Ergänzung berechnen. Das ist zwar eine echt tolle Methode, aber wir berechnen den Scheitelpunkt anders.
Die einfachste Methode den Scheitelpunkt zu berechnen, ist den Tiefpunkt der Parabel zu berechnen, in dem man die erste Ableitung Null setzt.

$y = x^2+4x-1$

$y' = 2x+4$

$y'=0 \;\Rightarrow\; 2x+4=0 \;\Rightarrow\; 2x=-4 \;\Rightarrow\; x=-2$

Den y-Wert erhält man durch Einsetzen in p.

$y = (-2)^2+4\cdot(-2)-1 = 4-8-1 = -5 \quad \Rightarrow$ $\quad$ $\underline{S(-2|-5)}$

Bestimmung der Gerade g:

Die Gerade g verläuft durch die Punkte S und B, also verwenden wir die ZPF.

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ $\quad$ S(-2|-5) und B(1|4) einsetzen

$\frac{4-(-5)}{1-(-2)} = \frac{y-(-5)}{x-(-2)}$ $\quad$ zusammenrechnen

$\frac{9}{3} = \frac{y+5}{x+2}$ $\quad$ kürzen

$3 = \frac{y+5}{x+2}$ $\quad$ $|\cdot(x+2)$

$3\cdot(x+2) = y+5$ $\quad$ Klammer auflösen

$3x+6 = y+5$ $\quad$ $|-5$

$3x+1 = y$ $\quad \Rightarrow$ $\quad$ **g : y = 3x+1**

Lösung von P5

Die Berechnung der Funktionswerte erfolgt natürlich mit dem Taschenrechner.

Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	1	5	5	3	1	1	5

Die Extrempunkte berechnet man, indem man f'(x) = 0 setzt.

Wir leiten wir f(x) zweimal ab [f''(x) brauchen wir jetzt eigentlich noch nicht, aber später].

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{4}{3}x + 5$$
$$f'(x) = \frac{3}{3}x^2 - 2x - \frac{4}{3} = x^2 - 2x - \frac{4}{3}$$
$$f''(x) = 2x - 2$$

$$f'(x) = 0$$
$$x^2 - 2x - \frac{4}{3} = 0$$

(p-q-Formel) (a-b-c-Formel)

Sie sollten natürlich nur den Weg *entweder* über p-q-Formel *oder* über a-b-c-Formel rechnen.

p-q-Formel:

$$x^2 - 2x - \frac{4}{3} = 0$$
$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1^2 - \left(-\frac{4}{3}\right)} =$$
$$= 1 \pm \sqrt{2{,}333} =$$
$$= 1 \pm 1{,}53$$

a-b-c-Formel:

$$x^2 - 2x - \frac{4}{3} = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)}}{2 \cdot 1} =$$
$$= \frac{2 \pm \sqrt{9{,}333}}{2} =$$
$$= \frac{2 \pm 3{,}055}{2}$$

$$x_1 = 2{,}53 \quad x_2 = -0{,}53$$

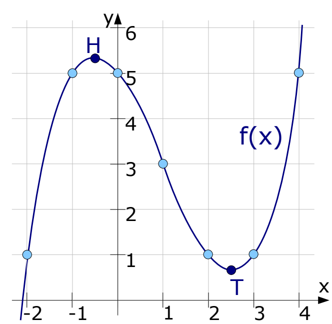
Das sind die x-Werte der Extrema.
Die y-Werte berechnet man, indem man die x-Werte in f(x) einsetzt.

$$y_1 = f(x_1) = \frac{1}{3} \cdot 2{,}53^3 - 2{,}53^2 - \frac{4}{3} \cdot 2{,}53 + 5 = 0{,}62 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{EP_1(2{,}53|0{,}62)}$$
$$y_2 = f(x_2) = \frac{1}{3} \cdot (-0{,}53)^3 - (-0{,}53)^2 - \frac{4}{3} \cdot (-0{,}53) + 5 = 5{,}38 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{EP_2(-0{,}53|5{,}38)}$$

Untersuchung der Punkte auf Hoch- oder Tiefpunkte.
Dazu setzt man die x-Werte in f''(x) ein und überprüft das Vorzeichen.

x_1 in f''(x): $f''(2{,}53) = 2 \cdot 2{,}53 - 2 = 3{,}06 > 0$
$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei **T(2,53 | 0,62)**

x_2 in f''(x): $f''(-0{,}53) = 2 \cdot (-0{,}53) - 2 = -3{,}06 < 0$
$\Rightarrow$ Hochpunkt bei **H(-0,53 | 5,38)**



Lösung von P6

Einzeichnen von g_1: Von g_1 kennt man die beiden Punkte B und Q. Zeichnet man die beiden Punkte ein, kann man sie zu g_1 verbinden.

Einzeichnen von g_2: Von dieser Geraden kennt man die Geradengleichung. Man zeichnet sie ein, indem man am y-Achsenabschnitt von -4 beginnt, und dann eine Steigung von 2 einzeichnet.

Einzeichnen von g_3: Die Gerade g_3 hat die Steigung $m = \frac{3}{4}$, da sie senkrecht auf der Geraden h steht und somit die eine Steigung der negative Kehrwert der anderen Steigung ist. $m_h = -\frac{4}{3} \;\Rightarrow\; m_{g_3} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$.

Bestimmung der Geraden g_1 :

Man kennt zwei Punkte, also wendet man ZPF an:

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ B und Q einsetzen

$\frac{1-(-0,5)}{5-5,5} = \frac{y-(-0,5)}{x-5,5}$ zusammenrechnen

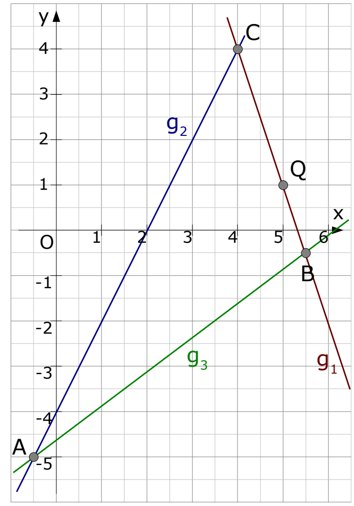
$\frac{1,5}{-0,5} = \frac{y+0,5}{x-5,5}$

$-3 = \frac{y+0,5}{x-5,5}$ | · (x−5,5)

$-3\cdot(x-5,5) = y+0,5$ Klammer auflösen

$-3x+16,5 = y+0,5$ | -0,5

$-3x+16 = y$



g_1 : y = -3x+16

Bestimmung der Geraden g_3:

Von g_3 kennt man den Punkt A und die Steigung $m={}^3/_4$. Da verwendet man die PSF.

$m = \frac{y-y_A}{x-x_A}$ | m und A einsetzen

$\frac{3}{4} = \frac{y-(-5)}{x-(-0,5)}$ zusammenrechnen

$\frac{3}{4} = \frac{y+5}{x+0,5}$ | · (x+0,5)

$\frac{3}{4}\cdot(x+0,5) = y+5$ vereinfachen

$\frac{3}{4}x+\frac{3}{8} = y+5$ | -5

$\frac{3}{4}x-\frac{37}{8} = y$ ⇒ $\mathbf{g_3 : y = \frac{3}{4}x-\frac{37}{8}}$

Den Schnittpunkt zweier Geraden bestimmt man durch Gleichsetzen.

$g_1 = g_2$

$-3x+16 = 2x-4$ | −2x−16

$-5x = -20$ | : (-5)

$x = 4$

Um y zu bestimmen setzt man x=4 in eine der Geraden einsetzt.

x=4 in g_1: $y = -3\cdot4+16 = 4$ ⇒ **C(4 | 4)**

Wie prüft man, ob der Punkt A auf der Gerade g_2 liegt? Man setzt die Koordinaten von A in g_2 ein und schaut, ob man eine wahre Aussage erhält.

A(-0,5|-5) ⇒ $x_A=-0,5$ und $y_A=-5$

g_2 : $y = 2x-4$ Koordinaten von A einsetzen

$-5 = 2\cdot(-0,5)-4$ ausrechnen

$-5 = -5$ ⇒ wahre Aussage ⇒ **A liegt auf g_2**

Zum Schluss brauchen wir noch den prozentualen Unterschied zwischen dem Abstand von B zur y-Achse und der Länge von $\overline{AB}$.

Der Abstand eines Punktes zur y-Achse ist immer der x-Wert, daher ist auch der Abstand von B zur y-Achse der x-Wert von B, also 5,5.

Die Streckenlänge $\overline{AB}$ bestimmt man mit der Entfernungsformel

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5{,}5-(-0{,}5))^2 + (-0{,}5-(-5))^2} =$$
$$= \sqrt{6^2 + 4{,}5^2} = \sqrt{6^2 + 4{,}5^2} = 7{,}5$$

Nun zur Frage: Um wieviel Prozent ist die Strecke $\overline{AB}$ länger als der Abstand von B zur y-Achse.

Anders gefragt: Um wieviel Prozent ist 7,5 größer als 5,5?

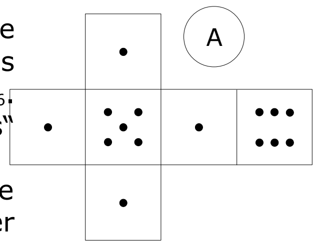
Der Unterschied beträgt: $7{,}5 - 5{,}5 = 2$

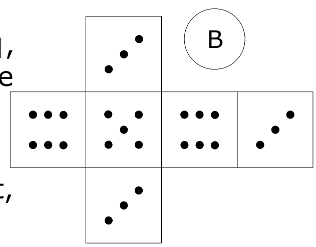
Der prozentuale Unterschied beträgt: $\frac{2}{5{,}5} \cdot 100\,\% \quad \approx \quad$ **36,36%**

[Man könnte natürlich auch den Dreisatz verwenden.]

Wahlteil

Lösung von W1 a)





Die W.S. [=Wahrscheinlichkeit], dass bei Würfel A eine „Sechs" erscheint liegt bei: $P_A(6) = {}^1/_6$. Die W.S., dass bei Würfel B eine „Sechs" erscheint liegt bei: $P_B(6) = {}^2/_6$. Automatisch gilt damit für die W.S., dass *keine* „Sechs" erscheint: $P_A(\overline{6}) = {}^5/_6$. bzw. $P_B(\overline{6}) = {}^4/_6$.

Die W.S., dass mit beiden Würfeln mindestens eine „Sechs" geworfen wird, kann man am einfachsten über das Gegenereignis berechnen.

Das Gegenereignis [ist der Fall der keinesfalls eintreten sollte], ist in diesem Fall das Ereignis, dass kein Würfel eine „Sechs" zeigt. Diesen Fall berechnen wir.

$$P(\overline{66}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{9}$$

Die W.S., dass mindestens eine „Sechs" erscheint, beträgt also: **P(mind. eine „6")** $= 1 - \frac{5}{9} = \boldsymbol{\frac{4}{9}}$

Würfelergebnisse	Gewinn
gleiche Augenzahl (Pasch)	9,00 €
verschiedene Augenzahlen	kein Gewinn
Einsatz pro Spiel:	1,00 €

Für den Erwartungswert braucht man die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse.

Es gibt nur zwei Ereignisse:

„Pasch" (mit dem Gewinn von 9€) und

„kein Pasch" (mit dem Gewinn von 0€)

$$P(\text{Pasch}) = P(55) + P(66) =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad P(9€) = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow P(\text{verschiedene Augenzahl}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \quad \Rightarrow P(0€) = \frac{11}{12}$$

Nun kann man den Erwartungswert für die Auszahlung berechnen:

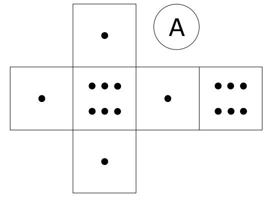
$$E(x) = 9 \cdot \frac{1}{12} + 0 \cdot \frac{11}{12} = 0{,}75€$$

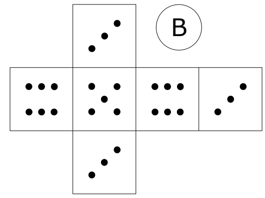
Nun kann man den Erwartungswert für den Gewinn berechnen:

$$E(x) = 0{,}75€ - 1€ = -0{,}25€$$

Der Spieler gewinnt -0,25€, sprich **der Spieler verliert pro Spiel 0,25€**.

Nun wird der Spielplan geändert. Die neuen Würfelnetze sehen wie rechts gezeichnet aus. Wichtigste Änderung: es gibt kein Fünferpasch mehr.





$P(\text{Pasch}) = P(66) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9} \qquad \Rightarrow \qquad P(9€) = \frac{1}{9}$

$P(\text{kein Pasch}) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \qquad \Rightarrow \qquad P(0€) = \frac{8}{9}$

Der neue Erwartungswert berechnet sich nun wie folgt:

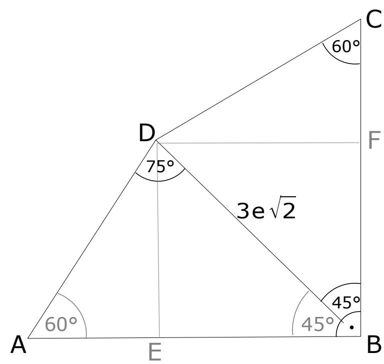
$E(x) = 9 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot \frac{8}{9} = 1€$

Der neue Erwartungswert für den Gewinn:

$E(x) = 1€ - 1€ = 0€$

Das Spiel ist nun fair. Weder Spieler noch Veranstalter gewinnen nun. Da der Veranstalter vorher 0,25€ gewonnen hat, ist die **Änderung für den Veranstalter ungünstig.**

Lösung von W1 b)



In der ganzen Figur gibt es keine rechten Winkel. Das ist ziemlich ungeschickt.

Wir ziehen daher von D aus eine waagerechte und eine senkrechte Hilfslinie ein und erhalten somit mehrere rechtwinklige Dreiecke.

Ab nun spart ein bisschen Nachdenken recht viele Rechenschritte.

Das Dreieck BFD ist rechtwinklig und hat zwei 45°-Winkel. Deswegen ist jedes der beiden Dreiecke ein halbes Quadrat. BFDE ist also ein Quadrat. ⇒ $\overline{BF}=\overline{DF}=\overline{DE}=\overline{BE}$.

Die Dreiecke CDF und ADE sind beides 30°-60°-90°-Dreiecke. Da die Seiten $\overline{DF}$ und $\overline{DE}$ gleich lang sind, müssen die beiden Dreiecke kongruent sein. Es gilt also: $\overline{CF}=\overline{AE}$ und $\overline{CD}=\overline{AD}$.

ΔBFD:

Bestimmung von $\overline{BF}$:

$\cos(45°) = \frac{\overline{BF}}{\overline{BD}} \qquad | \cdot \overline{BD}$

$\overline{BF} = \overline{BD} \cdot \cos(45°) = 3e\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \frac{1}{2} e\sqrt{4} = 3e \Rightarrow \overline{BF}=\overline{DF}=\overline{DE}=\overline{BE}=3e$

ΔFCD:

Bestimmung von $\overline{CF}$:

$\tan(60°) = \frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} \qquad | \cdot \overline{CF} \quad |: \tan(60°)$

$\overline{CF} = \frac{\overline{DF}}{\tan(60°)} = \frac{3e}{\sqrt{3}} = \frac{3e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3e\sqrt{3}}{3} = e\sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{CF}=\overline{AE}= e\sqrt{3}$

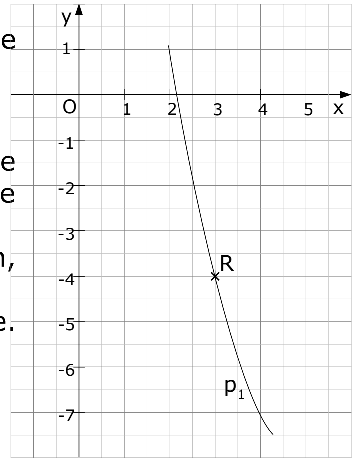
Bestimmung des Flächeninhalts von ΔABD:

$A_{\Delta ABD} = ½ \cdot g \cdot h = ½ \cdot \overline{AB} \cdot \overline{DE} = ½ \cdot (\overline{AE}+\overline{EB}) \cdot \overline{DE} = \frac{1}{2} \cdot (e\sqrt{3}+3e) \cdot 3e$

Bestimmung des Flächeninhalts von ABCD:

$A_{ABCD} = 2 \cdot A_{\Delta ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (e\sqrt{3}+3e) \cdot 3e = (e\sqrt{3}+3e) \cdot 3e = \mathbf{3e^2(\sqrt{3}+3)}$

Lösung von W2 a)



Laut Aufgabenstellung soll das gezeichnete Ding p_1 eine nach oben geöffnete Normalparabel sein.

Also hat p_1 die Form: $p_1 : y = x^2+px+q$

[„p_1" und „p" haben nichts miteinander zu tun !!]

Bei diesem Ansatz braucht man zwei Punkte, die man in die Parabelgleichung einsetzt, um die Parameter „p" und „q" zu erhalten.

Den einen Punkt kann man der Skizze entnehmen, [er ist schließlich deutlich markiert]: R(3|-4).

Den anderen Punkt entnimmt man der Wertetabelle. Nennen wir den Punkt P $\Rightarrow$ P(7|-4).

Nun setzen wir beide Punkte in $y=x^2+px+q$ ein.

R in p_1: $-4 = 3^2+p\cdot 3+q \;\Rightarrow\; -4 = 9+3p+q$

P in p_1: $-4 = 7^2+p\cdot 7+q \;\Rightarrow\; -4 = 49+7p+q$

$0 = -40-4p \;\Rightarrow\; 40=-4p \;\Rightarrow\; p=-10$

$p=-10$ in $-4=9+3p+q$: $-4=9+3\cdot(-10)+q \;\Rightarrow\; -4=-21+q \;\Rightarrow\; q=17$

Einsetzen von $p=-10$ und $q=17$ in die Parabelgleichung $\Rightarrow$ $\mathbf{p_1 : y=x^2-10x+17}$

Nun kann man die Wertetabelle vervollständigen.

Dazu setzt man die x-Werte in die Parabelgleichung ein [d.h. ein bissl auf dem Taschenrechner rumtippen].

Wertetabelle:	3	4	5	6	7	8	9
	-4	-7	-8	-7	-4	1	8

Wie zeigt man, dass zwei Parabeln keinen Schnittpunkt haben?

Man setzt die Parabeln gleich und hofft keine Lösung zu erhalten.

$$p_1 = p_2$$
$$x^2-10x+17 = -x^2-4 \qquad |+x^2+4$$
$$2x^2-10x+21 = 0$$

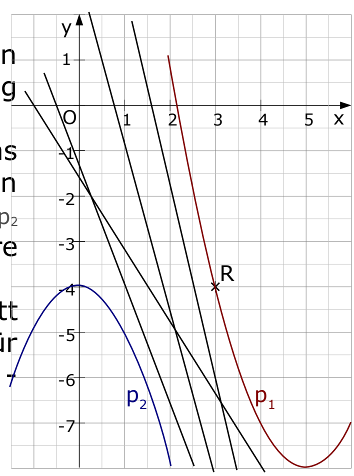
(p-q-Formel)

$$2x^2-10x+21=0 \qquad |:2$$
$$x^2-5x+10{,}5=0$$
$$x_{1,2}=2{,}5\pm\sqrt{2{,}5^2-10{,}5}$$
$$= 2{,}5\pm\sqrt{-4{,}25}$$

(a-b-c-Formel)

$$2x^2-10x+21 = 0$$
$$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 2\cdot 21}}{2\cdot 2}$$
$$=\frac{10\pm\sqrt{-68}}{4}$$

Unter der Wurzel steht was Negatives, es gibt keine Lösung, es gibt also keine Schnittpunkte der beiden Parabeln.

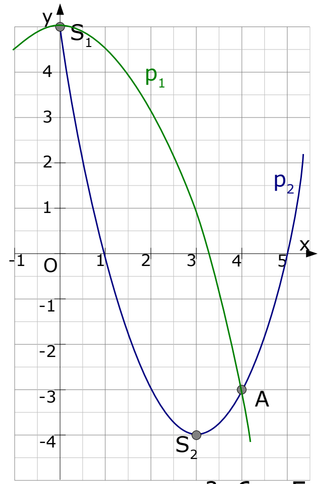


Welche Gerade hat keinen Punkt mit den Parabeln gemeinsam? Es gibt keine mathematische Rechnung dafür.

Man zeichnet einfach ein paar Geraden in das Koordinatensystem ein, die keine der Parabeln schneiden [natürlich muss man erst die Parabeln p_1 und p_2 einzeichnen]. In der Skizze rechts sind mehrere Möglichkeiten eingezeichnet.

Sie sollten für Ihre Gerade für den y-Achsenabschnitt einen Wert ca. zwischen -3 und 17 erhalten und für die Steigung Ihrer Gerade einen Wert ca. zwischen -0,5 und -5 erhalten.

Lösung von W2 b)

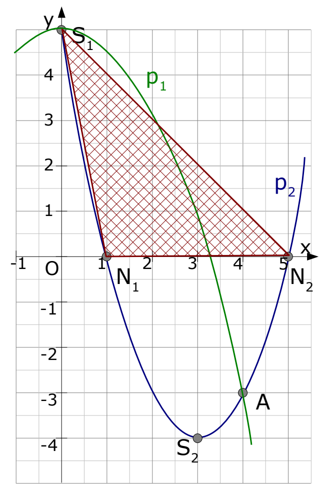


Im zweiten Satz geht es um die Normalparabel p_2 und ihren Scheitelpunkt S_2. Zwar ist in diesem Satz nichts gefragt, aber wir brauchen mit Sicherheit irgendwann man die Gleichung der Parabel. Da wir die Koordinaten des Scheitelpunktes kennen, verwenden wir die Scheitelform. $y=a\cdot(x-x_s)^2+y_S$.
$x_S=3$ und $y_S=-4$ einsetzen. (da es sich um eine Normalparabel handelt, gilt $a=1$).
$\Rightarrow$ $p_2{:}y=1\cdot(x-3)^2-4=(x^2-6x+9)-4=x^2-6x+5$

Nun brauchen wir den Scheitelpunkt von p_1.
Die Parabel p_1 hat die Form: $y=a\cdot x^2+c$, ist also symmetrisch zur y-Achse. Daher ist der x-Wert des Scheitelpunkts 0. Den y-Wert erhält man, in dem man $x=0$ in die Gleichung von p_1 einsetzt.
$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}\cdot 0^2+5 = 5$ $\Rightarrow$

$p_2 : y = x^2-6x+5$

$S_1(\ 0 \mid 5\ )$



Nun berechnen wir die Nullstellen von p_2.
Normalerweise würde man die Parabelgleichung Null setzen, also $x^2-6x+5=0$. Dafür braucht man aber p-q-Formel oder a-b-c-Formel, das geht zwar, ist aber umständlich.
Geschickter ist es, wenn man die Scheitelform von p_2 Null setzt. $\Rightarrow$ $1\cdot(x-3)^2-4=0$ $\quad |+4$

$\Rightarrow \quad (x-3)^2=4 \quad | \sqrt{\ }$

$\Rightarrow \quad x-3=\pm 2 \quad |+3$

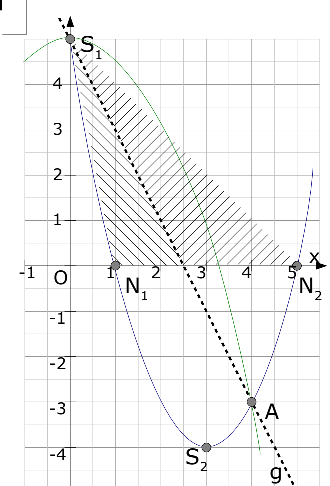
$\Rightarrow \quad x_1= 2+3=5$

$x_2=-2+3=1$

$N_1(1|0)\ \ N_2(5|0)$

Den Flächeninhalt des Dreiecks $N_1N_2S_1$ lässt sich nun einfach berechnen, denn die Grundlinie N_1N_2 liegt auf der x-Achse. Die Länge davon berechnet sich über die Differenz der x-Werte von N_1 und N_2.
$g_\Delta = |N_1N_2| = 5-1 = 4$.
Die Höhe des Dreiecks ist der y-Wert des Punktes S_1
$\Rightarrow$ $h_\Delta = y_{S1} = 5$ $\Rightarrow$
Den Flächeninhalts des Dreiecks $N_1N_2S_1$ berechnet man über die Formel: $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$ $\Rightarrow$ $A_{N1N2S1} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5 = 10$

$\mathbf{A_{N1N2S1} = 10}$



Die Gerade g geht durch die Schnittpunkte der beiden Parabeln, wir brauchen also die Schnittpunkte.

$p_1 = p_2$

$-\frac{1}{2}\cdot x^2+5 = x^2-6x+5 \quad |\cdot 2$

$-x^2+10 = 2x^2-12x+10 \quad |+x^2-10$

$0 = 3x^2-12x \quad$ „x" ausklammern

$0 = x\cdot(3x-12) \quad$ Satz vom Nullprodukt

$x_1=0 \qquad 3x-12=0 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x_2=4$

Die y-Werte erhält man, in dem man „x" in eine der Parabeln einsetzt:

$x_1=0 \Rightarrow y_1=-\frac{1}{2}\cdot 0^2+5=5 \Rightarrow S_1(0|5)$

$x_2=4 \Rightarrow y_2=-\frac{1}{2}\cdot 4^2+5=-8+5=-3 \Rightarrow A(4|-3)$

[Der erste Schnittpunkt ist zufällig einer der Scheitelpunkte. Den zweiten Schnittpunkt habe ich „A" genannt. Beides hat keine tiefere Bedeutung.]

Mit den zwei Punkten S_1 und A wendet man ZPF an:

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ A und S_2 einsetzen

$\frac{5-(-3)}{0-4} = \frac{y-(-3)}{x-4}$ zusammenrechnen

$\frac{8}{-4} = \frac{y+3}{x-4}$

$-2 = \frac{y+3}{x-4}$ $|\cdot(x-4)$

$-2\cdot(x-4) = y+3$ Klammer auflösen

$-2x+8 = y+3$ $|-3$

$-2x+5 = y$ $\Rightarrow$ $g: y=-2x+5$

Nun die Preisfrage: halbiert g die Dreiecksfläche oder nicht?

g verläuft durch die Spitze des Dreiecks [S_1]. Wenn g also die Dreiecksfläche halbieren soll, dann muss die Gerade g auch die Grundlinie halbieren [sollte Ihnen das nicht klar sein, denken Sie an die Formel für die Dreiecksfläche $A_\Delta=½\cdot g\cdot h$. Wenn man die Fläche A_Δ halbiert und die Höhe h gleich bleibt, muss die Grundlinie g halbiert werden!].

Die Grundlinie des Dreiecks beginnt in $N_1(1|0)$ und endet in $N_2(5|0)$. Wenn die Gerade g diese Grundlinie halbieren soll, müsste sie durch die Mitte, also durch $M(3|0)$ verlaufen.

Jetzt machen wir nur noch eine Punktprobe von M mit der Geraden g und wissen Bescheid.

$M(3|0)$ in $g: y=-2x+5$ einsetzen: $0=-2\cdot3+5 \Rightarrow 0=-1$

Die Punktprobe stimmt nicht, die Gerade g halbiert also die Grundlinie des Dreiecks nicht.

$\Rightarrow$ **g halbiert die Dreiecksfläche nicht.**

Lösung von W3 a)

Eine Gerade, die parallel zur x-Achse verläuft, hat die Gleichung $y=c$. Damit hat auch die Gerade g von der am Anfang der Aufgabe die Rede ist, die Gleichung $y=c$. Diese Gerade soll nun durch den Schnittpunkt von K_f mit der y-Achse verlaufen.

Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat den x-Wert $x=0$ und den y-Wert $y=f(0)=...=5 \Rightarrow S_y(0|5)$.

Nun machen wir eine Punktprobe, setzen also $S_y(0|5)$ in $y=c$ ein. $\Rightarrow 5=c \Rightarrow g: y=5$. $g: y=5$

Die Gerade g schneidet nun K_f. Also setzt man beide gleich.

K_f **=** g

$\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{4}{3}x+5 = 5$ $|-5$

$\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{4}{3}x = 0$ $|\cdot3$

$x^3-3x^2-4x = 0$ „x" ausklammern

$x\cdot(x^2-3x-4) = 0$ Satz vom Nullprodukt

$x_1=0$ $x^2-3x-4=0$

$x^2-3x-4=0$

(p-q-Formel) (a-b-c-Formel)

$$x^2-3x-4=0 \qquad\qquad x^2-3x-4 = 0$$

$$x_{2,3}=1{,}5\pm\sqrt{1{,}5^2-(-4)} \qquad\qquad x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}$$

$$= 1{,}5\pm\sqrt{6{,}25} \qquad\qquad = \frac{3\pm\sqrt{25}}{2\cdot1}$$

$$= 1{,}5\pm2{,}5 \qquad\qquad = \frac{3\pm5}{2}$$

$$x_2=4 \quad x_3=-1$$

Da laut Aufgabenstellung gelten soll: $x_1<x_2<x_3$, müssen wir unsere x-Werte umnummerieren. $x_1=-1$, $x_2=0$ und $x_3=4$.
Die Berechnung der y-Werte wird einfach, wenn die x-Werte in die Gerade y=5 eingesetzt werden [alle y-Werte sind 5]. ⇒ **$S_1(-1|5)$** **$S_2(0|5)$**

Die Gerade w geht durch S_3 und durch den Wendepunkt von K_f. **$S_3(4|5)$**

S_3 haben wir bereits, den Wendepunkt müssen wir erst noch berechnen. In Aufgabe P5 des Pflichtteils hatten wir bereits die zweite Ableitung berechnet: $f''(x)=2x-2$, die muss Null gesetzt werden: $2x-2=0 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$.
Der x-Wert des Wendepunkts ist 1, den y-Wert entnimmt man der Wertetabelle ⇒ y=3 ⇒ <u>W(1|3)</u>

Mit S_3 und W wendet man die ZPF an, um w zu bestimmen.

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ W und S_3 einsetzen

$\frac{5-3}{4-1} = \frac{y-3}{x-1}$ zusammenrechnen

$\frac{2}{3} = \frac{y-3}{x-1}$ $| \cdot (x-1)$

$\frac{2}{3}\cdot(x-1) = y-3$ Klammer auflösen

$\frac{2}{3}\cdot x-\frac{2}{3} = y-3$ $| +3$

$\frac{2}{3}\cdot x+\frac{7}{3} = y$ ⇒ <u>$w:\ y = \frac{2}{3}\cdot x+\frac{7}{3}$</u>

Wie zeigt man, dass eine Gerade durch einen Punkt geht?
Man setzt die Koordinaten des Punktes in die Gerade ein.
P(-2|1) in die die Geradengleichung einsetzen...

$\Rightarrow\ 1 = \frac{2}{3}\cdot(-2)+\frac{7}{3} \quad\Leftrightarrow\quad 1 = -\frac{4}{3}+\frac{7}{3} \quad\Leftrightarrow\quad 1 = \frac{3}{3}$ wahre Aussage ⇒ <u>p liegt auf w</u>

t ist Tangente an K_f im Punkt P. Also bestimmt man die Tangente.
Zuerst bestimmen wir die Tangentensteigung über f'(x).

$f'(x) = x^2-2x-\frac{4}{3}$ [siehe Aufgabe P5]

$\Rightarrow\ m_{Tan} = f'(-2) = (-2)^2-2\cdot(-2)-\frac{4}{3} = \frac{20}{3}$

Wir kennen nun die Steigung der Tangente und einen Punkt [P(-2|1)] und können nun die PSF anwenden.

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1} \qquad | \; m_{Tan} \text{ und } P(-2|1) \text{ einsetzen}$$

$$\frac{20}{3} = \frac{y-1}{x-(-2)} \qquad | \cdot (x+2)$$

$$\frac{20}{3}\cdot(x+2) = y-1 \qquad \text{Klammer auflösen}$$

$$\frac{20}{3}\cdot x+\frac{40}{3} = y-1 \qquad | +1$$

$$\frac{20}{3}\cdot x+\frac{43}{3} = y \qquad \Rightarrow \qquad \underline{t: y_{Tan} = \frac{20}{3}\cdot x+\frac{43}{3}}$$

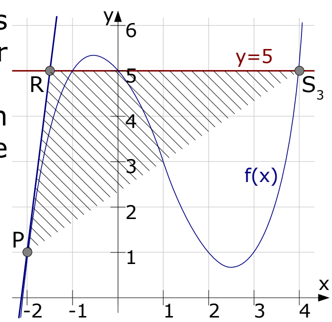
R ist der Schnittpunkt der Tangente t mit der Gerade g, also setzen wir t und g gleich.

$$\frac{20}{3}\cdot x+\frac{43}{3} = 5 \qquad | \cdot 3$$

$$20x+43=15 \qquad | -43$$

$$20x = -28 \qquad | : 20$$

$x = -1{,}4$ [Der y-Wert ist natürlich wieder 5 wegen g:y=5] $\Rightarrow$ $\underline{R(-1{,}4|5)}$



Nun können wir endlich den Flächeninhalt des Dreiecks RPS_3 berechnen, denn wir kennen die Koordinaten der drei Ecken: $R(-1{,}4|5)$ $P(-2|1)$ und $S_3(4|5)$.

Möglichkeit 1: die lange Flächeninhaltsformel, in welche man die Koordinaten der drei Eckpunkte einsetzt: $A=\frac{1}{2}\cdot[x_1\cdot(y_2-y_3)+x_2\cdot(y_3-y_1)+x_3\cdot(y_1-y_2)]$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\cdot[-1{,}4\cdot(1-5)+(-2)\cdot(5-5)+4\cdot(5-1)] =$

$= \frac{1}{2}\cdot[5{,}6 + 0 + 16] = 10{,}8$

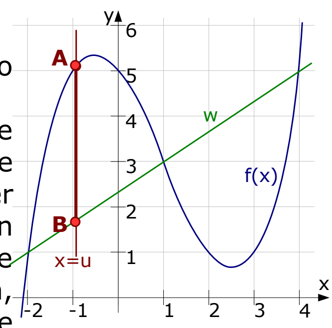
Möglichkeit 2: $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$

$g = RS_3 =$ [Differenz der x-Werte] $= 4-(-1{,}4) = 5{,}4$

$h = RP =$ [Differenz der y-Werte] $= 5-1 = 4$

$\Rightarrow A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 5{,}4\cdot 4 = 10{,}8 \qquad \Rightarrow$ $\mathbf{A_{\Delta RPS3} = 10{,}8}$**[cm²]**

Lösung von W3 b)



Die Gerade x=u ist eine senkrechte Gerade, die irgendwo zwischen -2 und 1 liegt [wegen -2<u<1].

Nun haben wir hier eine etwas interessante Formulierung: „K_f und w schneiden aus x=u eine Strecke aus". Das bedeutet, dass das obere Ende der besagten Strecke durch einen Punkt A beschrieben wird, der auf der Funktion f(x) liegt. Das untere Ende der Strecke wird durch einen Punkt B beschrieben, welcher auf der Gerade w liegt. Betrachten wir die Punkte A und B näher.

Beide Punkte haben den x-Wert „u", da sie beide auf der Gerade x=u liegen. Jeden y-Wert errechnet man, in dem man den x-Wert in die Funktion einsetzt.

Der obere Punkt A liegt auf der Funktion f(x), hat also den y-Wert:

$$y_A = f(u) = \frac{1}{3}u^3-u^2-\frac{4}{3}u+5 \qquad \Rightarrow \qquad A\left(u\left|\frac{1}{3}u^3-u^2-\frac{4}{3}u+5\right.\right)$$

Dementsprechend liegt der untere Punkt B auf der Geraden w, hat also den

$$\text{y-Wert:} \quad y_B = \frac{2}{3}\cdot u+\frac{7}{3} \qquad \Rightarrow \qquad B\left(u\left|\frac{2}{3}u+\frac{7}{3}\right.\right)$$

Die Strecke AB [bzw. die Gerade x=u] ist senkrecht, also berechnet man deren Länge über die Differenz der y-Werte.

$\Rightarrow$ $d(u) = |AB| = y_A - y_B = \left(\frac{1}{3}u^3 - u^2 - \frac{4}{3}u + 5\right) - \left(\frac{2}{3}\cdot u + \frac{7}{3}\right) = \frac{1}{3}u^3 - u^2 - \frac{4}{3}u + 5 - \frac{2}{3}\cdot u - \frac{7}{3} =$

$= \frac{1}{3}u^3 - u^2 - \frac{6}{3}u + \frac{8}{3} = \frac{1}{3}u^3 - u^2 - 2u + \frac{8}{3}$

Die Strecke d(u) soll am größten werden, also einen Hochpunkt annehmen.

Dafür setzt man die Ableitung d'(u) gleich Null.

$$d'(u) = 0$$
$$\frac{3}{3}u^2 - 2u - 2 = 0$$
$$u^2 - 2u - 2 = 0$$

(p-q-Formel)

$$u^2 - 2u - 2 = 0$$
$$u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1^2 - (-2)}$$
$$= 1 \pm \sqrt{3}$$

(a-b-c-Formel)

$$u^2 - 2u - 2 = 0$$
$$u_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}$$
$$= \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$u_1 \approx 2{,}73$ $\quad u_2 \approx -0{,}73$

Da laut Aufgabenstellung $-2<u<1$, gilt nur $u_2=-0{,}73$. [$u_1=2{,}73$ gilt nicht]

Die ausgeschnittene Strecke ist am größten für u=-0,73.

Wie lang ist die maximale Strecke? Dafür setzen wir einfach u=-0,73 in die Formel für d(u) ein:

$d_{maximal} = d(-0{,}73) = \frac{1}{3}\cdot(-0{,}73)^3 - (-0{,}73)^2 - 2\cdot(-0{,}73) + \frac{8}{3} \approx 3{,}46$

Die längste ausgeschnittene Strecke hat eine Länge von 3,46.

Lösung von W4 a)

Wie zeigt man, dass ein Viereck ein Drachen ist? Na ja, ein Drachen ist ein Viereck, in welchem je zwei nebeneinander liegende Seiten gleich lang sind. Also berechnen wir alle Seitenlängen und hoffen, dass je zwei gleich lang sind.

$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5{,}5 - (-0{,}5))^2 + (-0{,}5 - (-5))^2} = \sqrt{6^2 + 4{,}5^2} = 7{,}5$

$|BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(4 - 5{,}5)^2 + (4 - (-0{,}5))^2} = \sqrt{(-1{,}5)^2 + 4{,}5^2} = \sqrt{22{,}5}$

$|CD| = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(-0{,}5 - 4)^2 + (2{,}5 - 4)^2} = \sqrt{(-4{,}5)^2 + (-1{,}5)^2} = \sqrt{22{,}5}$

$|DA| = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{(-0{,}5 - (-0{,}5))^2 + (-5 - 2{,}5)^2} = \sqrt{0^2 + 7{,}5^2} = 7{,}5$

Welch ein Glück! $|AB|=|DA|$ und $|BC|=|CD|$ $\Rightarrow$ **ABCD ist ein Drachen**.

Der Drachen soll einen rechten Winkel haben. Laut Skizze [der nächsten Seite] könnte der rechte Winkel bei C sein. Wir versuchen das zu beweisen.

Die Geraden BC und CD bilden einen rechten Winkel, wenn die eine Steigung der negative Kehrwert der anderen Steigung ist. Bzw wenn gilt: $m_{BC}\cdot m_{CD}=-1$

Berechnung von m_{BC}: $m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{4-(-0{,}5)}{4-5{,}5} = \frac{4{,}5}{-1{,}5} = -3$

Berechnung von m_{CD}: $m_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{2{,}5-4}{-0{,}5-4} = \frac{-1{,}5}{-4{,}5} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow m_{BC} \cdot m_{CD} = 3 \cdot \frac{1}{3} = -1$ $\Rightarrow$ **ABCD hat bei C einen rechten Winkel.**

Für die Innenwinkel brauchen wir noch einen Winkel, z.B. β. Dafür wiederum brauchen wir die Steigung der Strecke AB und die Steigung der Strecke BC.

$m_{BC} = -3$ [siehe ein paar Zeilen weiter oben]

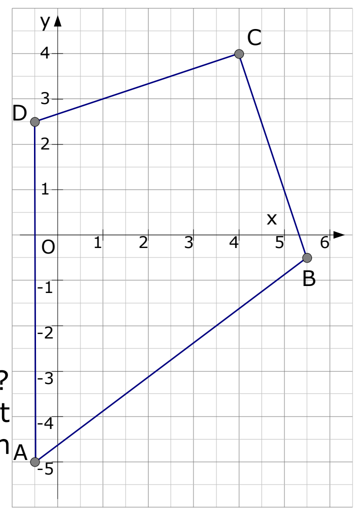
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-0{,}5-(-5)}{5{,}5-(-0{,}5)} = \frac{4{,}5}{6} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \tan(\beta) = \left|\frac{m_2 - m_1}{1+m_1 \cdot m_2}\right| = \left|\frac{\frac{3}{4}-(-3)}{1+\frac{3}{4}(-3)}\right| = \left|\frac{\frac{15}{4}}{-\frac{5}{4}}\right| = 3 \Rightarrow \beta = \tan^{-1}(3) = 71{,}57°$$

Da β laut Skizze offensichtlich ein stumpfer Winkel ist,
haben wir den Komplementärwinkel erhalten. Es gilt für β daher:
$\beta = 180° - 71{,}57° = 108{,}43°$
δ ist aus Symmetriegründen genau so groß wie β. $\Rightarrow$ **$\beta = \delta = 108{,}43°$**
α kann man aus der Winkelsumme des Vierecks berechnen:
$\alpha = 360° - 90° - 2 \cdot 108{,}43° = 53{,}14°$ $\Rightarrow$ **$\alpha = 53{,}14°$**
[$\gamma = 90°$, das haben wir ja schon vorher errechnet!]

Den Flächeninhalt eines Drachens berechnet man am einfachsten über die Formel: $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$, wobei e und f die Diagonalen sind.
Wir brauchen zuerst die Längen der Diagonalen:

$$e = |AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} =$$
$$= \sqrt{(4-(-0{,}5))^2 + (4-(-5))^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 9^2} = \sqrt{101{,}25}$$
$$f = |BD| = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} =$$
$$= \sqrt{(-0{,}5-5{,}5)^2 + (2{,}5-(-0{,}5))^2} = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{45}$$



Nun können wir die Fläche des Drachens berechnen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{101{,}25} \cdot \sqrt{45} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{101{,}25} \cdot \sqrt{45} = 33{,}75$$

Lösung von W4 b)

Wie zeigt man, dass ein Punkt auf einer Geraden liegt?
Man setzt den Punkt in die Gerade ein. Man macht das natürlich auch, wenn die Gerade einen Parameter enthält.
Also setzen wir den Punkt M in die Gerade h_k ein.
$M(2{,}5|1)$ in $h_k: y = 2kx - 5k + 1$ $\Rightarrow$ $1 = 2k \cdot 2{,}5 - 5k + 1$ $\Rightarrow$ $1 = 5k - 5k + 1$ $\Rightarrow$ $1 = 1$
Man erhält eine wahre Aussage.
$\Rightarrow$ **Der Punkt M liegt deswegen auf allen Geraden der Schar h_k.**

Den Schnittpunkt S_k von h_k mit der ersten Winkelhalbierenden erhält man, in dem man beide gleich setzt. h_k hat die Gleichung $y = 2kx - 5k + 1$ und die erste Winkelhalbierende hat die Gleichung $y = x$.

$\Rightarrow 2kx - 5k + 1 = x$ alles mit „x“ nach links, alles ohne „x“ nach rechts
$2kx - x = 5k - 1$ links ein „x“ ausklammern.

$x \cdot (2k-1) = 5k-1$ durch die Klammer teilen

$\mathbf{x = \frac{5k-1}{2k-1}}$ ← x-Wert von S_k

[Der y-Wert des Schnittpunktes ist nicht gefragt!]

Der x-Wert von S_k soll auf der Geraden x=4 liegen. Also setzen wir in den x-Wert von S_k statt dem „x" die „4" ein.

$4 = \frac{5k-1}{2k-1}$ | $\cdot (2k-1)$

$4 \cdot (2k-1) = 5k-1$ Klammer auflösen

$8k-4 = 5k-1$ | $-5k+4$

$3k = 3 \quad \Rightarrow \quad k=1$

Für k=1 liegt der x-Wert von S_k auf der Geraden x=4.