Realschulabschluss

an

Waldorfschulen

Prüfung 2014

Prüfung 2014

Pflichtbereich

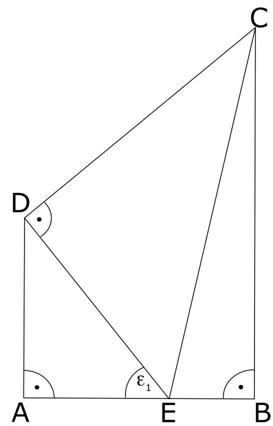
Aufgabe P 1: *(aus Waldorf-RAP)*

(4 P)

Im Viereck ABCD sind gegeben:

$\overline{AE} = 3{,}2$ cm
$\overline{CD} = 5{,}8$ cm
$\varepsilon_1 = 54{,}6°$

Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks EBC.



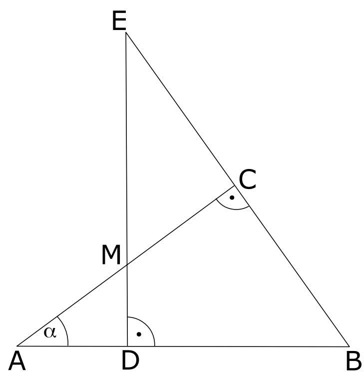
Aufgabe P 2: *(aus Waldorf-RAP)*

(4 P)

Das Dreieck ABC und das Dreieck DBE überdecken sich teilweise.

Es gilt:
$\overline{AB} = 6{,}2$ cm
$\alpha = 36{,}2°$
M ist der Mittelpunkt von $\overline{AC}$.

Berechnen Sie die Länge von $\overline{DE}$.



Aufgabe P 3: *(aus Waldorf-RAP)*

Geben Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung an: (3,5 P)

$$\frac{x}{x+4} = \frac{3x+28}{x^2+4x} + \frac{1}{x}$$

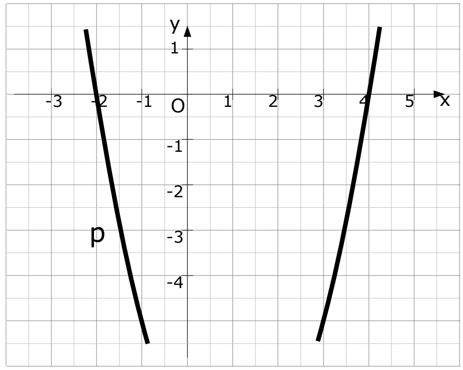
Aufgabe P 4: *(aus Waldorf-RAP)*

(3,5 P)

Das Schaubild zeigt den Ausschnitt einer verschobenen Normalparabel p.

Eine Gerade g geht durch den Punkt R(2,5|-4) und hat die Steigung m=-2.

Berechnen Sie Koordinaten der Schnittpunkte von p und g.



Aufgabe P 5: *(aus Waldorf-RAP)*

Eine Funktion f hat die Gleichung: (7,5 P)

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 4$$

Ihr Schaubild sei K_f.

Berechnen Sie die Funktionswerte für alle ganzzahligen Werte von x im Bereich $0 \leqslant x \leqslant 8$.

Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte von K_f.

Untersuchen Sie diese Punkte auf Hoch- und Tiefpunkte.

Tragen Sie die berechneten Werte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein und zeichnen Sie K_f (1 LE = 1 cm).

Berechnen Sie den spitzen Winkel zwischen der y-Achse und dem Schaubild K_f im Schnittpunkt von K_f mit der y-Achse.

Aufgabe P 6: *(aus Waldorf-RAP)*

(7,5 P)

Die Gerade g_1 hat die Gleichung $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{2}$.

Die Gerade g_2 geht durch die Punkte C(-4,5|2) und P(0,5|-0,5).

Die Gerade g_3 geht durch den Punkt A(3,5|-2) und ist rechtwinklig zur Geraden g_1.

Zeichnen Sie die Geraden in ein rechtwinkliges Koordinatensystem (1LE=1cm) ein.

Berechnen Sie die Gleichungen der Geraden g_2 und g_3.

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes B von g_1 und g_3.

Zeigen Sie, dass der Punkt C auch auf g_1 liegt.

Um wie viel Prozent ist $\overline{PA}$ kürzer als $\overline{PC}$?

Aufgabe P 7:

(aus staatlicher-RAP 2004) (2 P)

Eine Schule nutzt das nebenstehende Angebot und kauft fünf Druckerpatronen.

Vom Preis einschließlich 16% Mehrwertsteuer dürfen 2% Skonto abgezogen werden.

Es sind dann 205,20 € zu überweisen.

Wie hoch ist der Katalogpreis für eine Einzelpatrone ohne den Mengenrabatt?

> **Angebot**
>
> Bei Abnahme von mindestens
> 5 Druckerpatronen erhalten Sie
> 5% Rabatt!
>
> Die Katalogpreise enthalten keine
> Mehrwertsteuer!

Aufgabe P 8:

(aus staatlicher-RAP 2004) (2 P)

Corinna legt 4 500,00 € zu folgenden Zinssätzen auf drei Jahre an:

1. Jahr 1,50%
2. Jahr 2,25%
3. Jahr 2,75%

Zinsen werden mitverzinst.

Hans legt ebenfalls 4.500,00 € auf drei Jahre an. Nach Ablauf des ersten Jahres erhält er 45,00 € Zinsen, nach Ablauf des zweiten Jahres 91,43 €.

Zinsen werden mitverzinst.

Welchen Zinssatz muss seine Bank im dritten Jahr gewähren, damit er nach den drei Jahren das gleiche Guthaben wie Corinna hat?

Wahlbereich

Aufgabe W 2:

(aus Waldorf-RAP)

a) Zu einer verschobenen, nach oben geöffneten Normalparabel p_1 gehört die unvollständig ausgefüllte Wertetabelle. (5,5 P)

x	-3	-2	-1	0	1	2
y		3		3		

Geben Sie die Gleichung der Parabel p_1 an und vervollständigen Sie die Wertetabelle.

Die Parabel p_2 hat die Gleichung $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$.

Zeichnen Sie die beiden Parabeln p_1 und p_2 in ein Koordinatensystem.
Eine Parabel p_3 hat die Gleichung $y=ax^2$.
Geben Sie einen möglichen Wert für den Faktor a so an, dass p_3 weder mit p_1 noch mit p_2 einen gemeinsamen Punkt hat.
Überprüfen Sie durch Rechnung.

b) Die Parabel p_1 hat die Gleichung $y=x^2+px-1$ geht durch den Punkt $A(-1|2)$. (4,5 P)

Eine weitere Parabel p_2 mit der Gleichung $y=-x^2+c$ verläuft ebenfalls durch den Punkt A.

Berechnen Sie den zweiten Schnittpunkt B der beiden Parabeln.

Die Parabel p_1 hat den Scheitel S_1, die Parabel p_2 hat den Scheitel S_2.

Luca behauptet:

„Die Gerade S_1B ist parallel zur Geraden S_2A.“

Hat Luca Recht? Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung.

Aufgabe W 3: *(aus Waldorf-RAP)*

a) Gegeben ist die Funktionsgleichung von Aufgabe 5 des Pflichtbereichs: (6 P)

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 4$$

Die Gerade h verläuft parallel zur x-Achse und geht durch den Tiefpunkt T von K_f.

Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von h mit K_f. Dabei hat der Schnittpunkt S_1 die x-Koordinate $x \leqslant 0$.

Die Tangente t_w an K_f im Wendepunkt W von K_f schneidet die y-Achse in A, die x-Achse in B und die Gerade h in C.

Zeichnen Sie t_w in das Koordinatensystem von K_f des Pflichtbereichs ein.

Der Flächeninhalt des Dreiecks S_1BA wird mit dem Flächeninhalt des Dreiecks S_1CB verglichen.

Zeigen Sie, dass die beiden Flächeninhalt gleich sind.

Aufgabe W 4: *(aus Waldorf-RAP)*

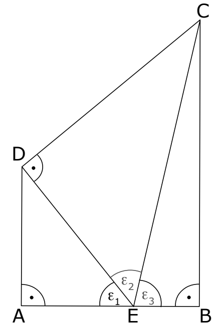
a) Gegeben sind die Punkte A(3,5|-2), B(1,5|4) und C(-4,5|2) der Aufgabe P6 des Pflichtbereichs. (6,5 P)
Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

Bestimmen Sie den Punkt D rechnerisch so, dass das Viereck ABCD ein Quadrat bildet.

Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Umkreises des Quadrats.

Um wie viel Grad ist das Quadrat gegenüber der x-Achse gedreht?

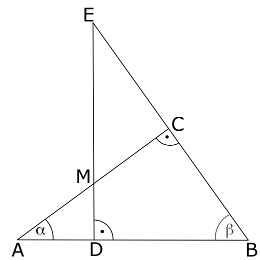
Tipps und Ergebnisse:



Tipps zu P1:

-Im Dreieck ADE über $\overline{AE}$ und ε_1: $\overline{DE}$ berechnen.
-Im Dreieck CDE über $\overline{CD}$ und $\overline{DE}$: $\overline{CE}$ und ε_2 berechnen.
-ε_3 über ε_1 und ε_2 berechnen.
-Im Dreieck BCE über ε_3 und $\overline{CE}$: $\overline{BE}$ und $\overline{BC}$ errechnen.
-Den Umfang über $\overline{BE}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CE}$ berechnen.

Ergebnisse in Kurzformat: $\overline{DE}=5{,}52$ $\overline{CE}=8{,}01$ $\overline{AE}=1{,}73$
$\varepsilon_2=46{,}4$ $\varepsilon_3=79{,}0$ $\overline{BE}=1{,}53$ $\overline{BC}=7{,}86$ $U_{\Delta BCE}=17{,}4$



Tipps zu P2:

-Im Dreieck ABC über $\overline{AB}$ und α: $\overline{AC}$ und β berechnen.
-$\overline{AM}$ über $\overline{AC}$ berechnen.
-Im Dreieck AMD über $\overline{AM}$ und α: $\overline{AD}$ berechnen.
-$\overline{BD}$ über $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ berechnen.
-Im Dreieck BDE über $\overline{BD}$ und β: berechnen von $\overline{DE}$.

Ergebnisse in Kurzformat: $\overline{AC}=5{,}00$ $\beta=53{,}8°$ $\overline{AM}=2{,}50$
$\overline{AD}=2{,}02$ $\overline{BD}=4{,}18$ $\overline{DE}=5{,}71$

Tipps zu P3:

-Definitionsmenge: jeden einzelnen Nenner Null setzen.
-Lösungsmenge: unten ausklammern, mit dem Hauptnenner multiplizieren.
Die entstehende Gleichung mit p-q-Formel / a-b-c-Formel lösen.

Ergebnisse in Kurzformat: $D = \mathbb{R}\backslash\{-4;0\}$ $L = \{8\}$

Tipps zu P4:

-Parabelgleichung mit Hilfe der Linearfaktorform bestimmen.
-Geradengleichung mit Hilfe der Punkt-Steigungs-Formel bestimmen.
-Schnittpunkte von Geraden und Parabel bestimmen.

Ergebnisse in Kurzformat: $y=x^2-2x-8$ $y=-2x+1$, Schnittpunkte: P(3|-5) Q(-3|7)

Tipps zu P5:

-Die x-Werte der Extrema erhält man, indem man die erste Ableitung Null setzt.
Die y-Werte erhält man durch Einsetzen von x in f(x).
-Ob´s ein Hoch- oder Tiefpunkt ist, erhält man, indem man die x-Werte in die zweite Ableitung einsetzt. [Ist das Ergebnis negativ, so ist´s ein Hochpunkt und umgekehrt].
-Den spitzen Winkel zwischen y-Achse und Funktion berechnet man mit der Schnittwinkel-Formel. Allerdings braucht man zuerst den Winkel zwischen der Horizontalen und der Funktion.

Ergebnisse in Kurzformat:

Wertetabelle:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	-4	-0,88	0	-0,63	-2	-3,38	-4	-3,12	0

HP(2 | 0)
TP(6 |-4)

Winkel zwischen x-Achse und f(x): 77,47°. Winkel zwischen y-Achse und Funktion: 12,53°.

Tipps zu P6:

-Zeichnen: Blatt, Geodreieck, Stift greifen. Punkte einzeichnen und verbinden...
-Die Gerade g_1 über ZPF berechnen [mit Punkt B und Q].
-Die Gerade g_3 über PSF berechnen [die Steigung von g_3 ist der negative Kehrwert der Steigung von h].
-Den Schnittpunkt C erhält man durch Gleichsetzen von g_1 und g_2 ($g_1=g_2$).
-A liegt auf g_2, wenn die Punktprobe stimmt [x- und y-Wert von A in g_2 einsetzen].
-Die Strecken $\overline{AB}$ erhält man über die Abstandformel [=Entfernungsformel], der Abstand von B zur y-Achse ist der x-Wert. Mit Dreisatz [oder Ähnlichem] den proz. Unterschied berechnen.

Ergebnisse in Kurzformat: $g_2{:}y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ $g_3{:}y=-3x+\frac{17}{2}$ B(1,5|4), proz.Unterschied ist 40,07%

Tipps zu P7:

-Die Mehrwertsteuer von 16% und das Skonto von 2% entsprechen Zinssätzen von $p_1=16\%$ und $p_2=-2\%$. Damit q_1 und q_2 berechnen und $K_n=K_0\cdot q_1\cdot q_2$ verwenden um K_0 zu bestimmen. [Drandenken, noch durch 5 zu teilen, weil es 5 Patronen sind.]

Ergebnisse in Kurzformat: Der Katalogpreis für eine Patrone liegt bei 36,10 €.

Tipps zu P8:

-Mithilfe von $K_3=K_0\cdot q_1\cdot q_2\cdot q_3$ Corinnas Vermögen nach drei Jahren berechnen.
-Mithilfe der Zinsbeträge der ersten 2 Jahre kann man Hans´ Vermögen nach zwei Jahren verechnen. Damit [über Dreisatz oder eine Zinsrechnung] den Zinssatz des letzten Jahres bestimmen.

Ergebnisse in Kurzformat: Corinna: $K_3=4.798{,}70$ € Hans: $K_2=4.656{,}43$ € $p_3=3{,}5\%$

Tipps zu W2 a)

-Eine verschobene Normalparabel hat die Form $y=x^2+px+q$.
Setzt man die Koordinaten der beiden Punkte ein [P(-2|3) und Q(0|3) aus WT], so erhält man die Parabelgleichung. Mit dieser kann man die Wertetabelle vervollständigen.
-Einzeichnen der beiden Parabeln... z.B. über die WT von beiden.
-Bestimmung der Parabel p_3: Erst eine Parabel grob skizzieren, die weder p_1 noch p_2 schneidet. Daraus einen beliebigen Punkt ablesen. Diesen in „$y=ax^2$" einsetzen und „a" bestimmen.
-Zum Nachweis, dass p_3 weder p_1 noch p_2 schneidet, setzt man p_1 und p_3 gleich, danach p_2 und p_3 und sollte jedes Mal keine Lösung erhalten.

Ergebnisse in Kurzformat: $p_1{:}y=x^2+2x+3$

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	6	3	2	3	6	11

p_3: es gibt sehr viele Möglichkeiten. Wenn Sie für „a" einen Wert erhalten, der ca. zwischen -0,5 und +0,577 liegt, dann wird Ihre Parabelgleichung vermutlich stimmen.

Tipps zu W2 b)

-Den Punkt A in p_1 einsetzen, dann erhält man „p" [und damit die Parabelgleichung von p_1].

-Den Punkt A in p_2 einsetzen, dann erhält man „c" [und damit die Parabelgleichung von p_2].

-Den Schnittpunkt erhält man, in dem man p_1 und p_2 gleichsetzt. [Einer der Punkte ist A, der andere Punkt ist gesucht].

-Die Scheitelpunkte von p_1 und p_2 bestimmen [z.B. in dem man die Ableitung Null setzt]. Danach die Steigung von S_1B bestimmen und die Steigung von S_2A.

Ergebnisse in Kurzformat: p_1:$y=x^2-2x-1$ p_2:$y=-x^2+3$ B(2|-1) S_1(-1|2) S_2(0|-1).
Beide Steigung sind $m_1=m_2=1$.

Tipps zu W3 a)

-Schnittpunkte mit h bestimmen: Parallelen zur x-Achse haben die Gleichung y=c. Hier den Tiefpunkt von K_f einsetzen, man erhält h. Danach h mit K_f schneiden [gleichsetzen] und die Schnittpunkte berechnen [man erhält zwei].

-Den Wendepunkt von K_f berechnen [$f''(x)=0$] . Die Steigung der Wendetangente bestimmen [den x-Wert des Wendepunkts in $f'(x)$ einsetzen]. Mit den Koordinaten des Wendepunkts und der Steigung die Wendetangente aufstellen [z.B. über PSF]. Die Koordinaten der Punkte A, B und C erhält man, indem man die Wendetangente mit der y-Achse, der x-Achse und mit h schneidet.

-Die Fläche der Dreiecke S_1BA und S_1CB kann man über die lange Flächeninhaltsformel oder über A=½·g·h berechnen.

Ergebnisse in Kurzformat: h:y=-4 S_1(0|-4) $S_{2,3}$(6|-4) W(4|2) t_w:$y=-\frac{3}{2}x+4$ A(0|4)
$B\left(\frac{8}{3}\middle|0\right)$ $C\left(\frac{16}{3}\middle|-4\right)$ $A_{\Delta S1BA}=A_{\Delta S1CB}=\frac{32}{3}$

Tipps zu W4 a)

-Ein gleichschenkliges Dreieck hat zwei gleich lange Seiten. Also drei mal Entfernungsformel anwenden. Zwei der Längen sollten gleich lang sein.

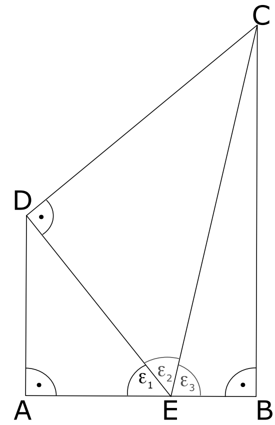
-D könnte man bestimmen, in dem man den Mittelpunkt von A und C bestimmt und dann den Punkt B an diesem Mittelpunkt spiegelt.

-Der Mittelpunkt M des Umkreises ist der Mittelpunkt von A und C oder der Mittelpunkt von B und D. Der Umkreisradius ist der Abstand von M zu einem der Eckpunkte A, B, C oder D.

-Die Drehung des Quadrats gegenüber der x-Achse ist der Schnittwinkel zwischen einer der Quadratseiten und der x-Achse. Also ... Schnittwinkel berechnen

Ergebnisse in Kurzformat: $|AB|=|BC|=\sqrt{40}$ $|AC|=\sqrt{80}$. D(-2,5|4)
Umkreis: M(-0,5|0) $r=\sqrt{20}$ Drehung: $\alpha=18{,}43°$ oder auch $\alpha=71{,}57°$

Ausführliche Lösung:



Lösung von P1

Es gibt ein einziges Dreieck, in welchem wir zwei Angaben [plus rechter Winkel] haben: das Dreieck ADE.
Daher beginnen wir im Dreieck ADE.

ΔADE:

Bestimmung von $\overline{DE}$:

$\cos(\varepsilon_1) = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} \qquad | \cdot \overline{DE}$

$\overline{DE} \cdot \cos(\varepsilon_1) = \overline{AE} \qquad | : \cos(\varepsilon_1)$

$\overline{DE} = \frac{\overline{AE}}{\cos(\varepsilon_1)} = \frac{3{,}2}{\cos(54{,}6)} \approx 5{,}52$ $\qquad \Rightarrow \overline{DE} = 5{,}52$ [cm]

ΔCDE:

Bestimmung von $\overline{CE}$:

$\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{CE}^2$

$\Rightarrow \overline{CE} = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2} = \sqrt{5{,}8^2 + 5{,}52^2} \approx 8{,}01$ $\qquad \Rightarrow \overline{CE} = 8{,}01$ [cm]

Bestimmung von ε_2: [es gibt jetzt mehrere Wege ε_2 zu berechnen]

$\tan(\varepsilon_2) = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} = \frac{5{,}8}{5{,}52} \approx 1{,}05 \Rightarrow \varepsilon_2 = \tan^{-1}(1{,}05) \approx 46{,}40$ $\qquad \Rightarrow \varepsilon_2 = 46{,}4°$

Bestimmung von ε_3:

$\varepsilon_3 = 180° - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 180° - 54{,}6° - 46{,}4° = 79{,}0°$ $\qquad \Rightarrow \varepsilon_3 = 79{,}0°$

ΔCDE:

Bestimmung von $\overline{BE}$:

$\cos(\varepsilon_3) = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \qquad | \cdot \overline{EC}$

$\Rightarrow \overline{BE} = \cos(\varepsilon_2) \cdot \overline{EC} = \cos(79{,}0°) \cdot 8{,}01 \approx 1{,}53$ $\qquad \Rightarrow \overline{BE} = 1{,}53$ [cm]

Bestimmung von $\overline{BC}$:

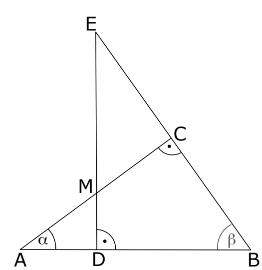
$\overline{BC}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{CE}^2$

$\Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{BE}^2} = \sqrt{8{,}01^2 - 1{,}53^2} \approx 7{,}86$ $\qquad \Rightarrow \overline{BC} = 7{,}86$ [cm]

Bestimmung des Umfangs des Dreiecks ΔBCE:

$U_{\Delta BCE} = \overline{BE} + \overline{BC} + \overline{CE} = 1{,}53 + 7{,}86 + 8{,}01 = 17{,}40$ $\qquad$ **$\Rightarrow U_{\Delta BCE} = 17{,}4$ [cm]**

Lösung von P2



Im rechtwinkligen Dreieck ABC kennen wir zwei Angaben [plus rechter Winkel]. Wir beginnen also hier.

ΔABC:

Bestimmung von $\overline{AC}$:

$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \qquad | \cdot \overline{AB}$

$\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \cos(\alpha) = 6{,}2 \cdot \cos(36{,}2) \approx 5{,}00$ $\qquad \Rightarrow \overline{AC} = 5{,}00$ [cm]

Bestimmung von β:

$\beta = 180° - 90° - \alpha = 180° - 90° - 36{,}2° = 53{,}8°$ $\qquad \Rightarrow \beta = 53{,}8°$

Bestimmung von $\overline{AM}$:

$\overline{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 5{,}00 = 2{,}50$ $\qquad \Rightarrow \overline{AM} = 2{,}50$ [cm]

ΔAMD:

Bestimmung von $\overline{AD}$:

$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AM}} \quad | \cdot \overline{AM}$

$\overline{AD} = \overline{AM} \cdot \cos(\alpha) = 2{,}5 \cdot \cos(36{,}2) \approx 2{,}02 \qquad \Rightarrow \overline{AD} = 2{,}02$ [cm]

Bestimmung von $\overline{BD}$:

$\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = 6{,}2 - 2{,}02 = 4{,}18 \qquad \Rightarrow \overline{BD} = 4{,}18$ [cm]

ΔBDE:

Bestimmung von $\overline{DE}$:

$\tan(\beta) = \frac{\overline{DE}}{\overline{BD}} \quad | \cdot \overline{BD}$

$\overline{DE} = \overline{BD} \cdot \tan(\beta) = 4{,}18 \cdot \tan(53{,}8) \approx 5{,}71 \qquad \Rightarrow$ **$\overline{DE}$ = 5,71 [cm]**

Lösung von P3

$\frac{x}{x+4} = \frac{3x+28}{x^2+4x} + \frac{1}{x}$ unten kann man im zweiten Bruch „x" ausklammern

$\frac{x}{x+4} = \frac{3x+28}{x \cdot (x+4)} + \frac{1}{x}$

Um die Definitionsmenge zu bestimmen, setzt man jede einzelne Klammer die in den Nennern auftaucht, Null.

erste Klammer: $x+4=0 \Rightarrow x_1=-4$

zweite Klammer: $x=0 \Rightarrow x_2=0 \qquad \Rightarrow$ **$D=\mathbb{R}\setminus\{-4;0\}$**

Um die Lösungsmenge zu bestimmen, multipliziert man die Gleichung mit allen Klammern.

$\frac{x}{x+4} = \frac{3x+28}{x \cdot (x+4)} + \frac{1}{x} \quad | \cdot x \cdot (x+4)$

$\frac{x}{\cancel{x+4}} \cdot x \cdot \cancel{(x+4)} = \frac{3x+28}{\cancel{x \cdot (x+4)}} \cdot \cancel{x \cdot (x+4)} + \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \cdot (x+4)$ kürzen

$x^2 = (3x+28) + 1 \cdot (x+4)$

$x^2 = 4x+32$

$x^2 - 4x - 32 = 0$

(p-q-Formel) (a-b-c-Formel)

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - (-32)} \qquad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32)}}{2 \cdot 1}$

$= 2 \pm \sqrt{36} \qquad = \frac{4 \pm \sqrt{144}}{2}$

$= 2 \pm 6 = \qquad = \frac{4 \pm 12}{4} =$

$x_1 = 8 \quad x_2 = -4$

Sie sollten natürlich nur den Weg *entweder* über p-q-Formel *oder* über a-b-c-Formel rechnen.

Die Zahl „-4" taucht bereits in der Definitionsmenge auf.
Sie kann also nicht Teil der Lösungsmenge sein.

$-4 \notin$ **D** $\qquad \Rightarrow$ **L = { 8 }**

Lösung von P4

Zuerst brauchen wir die Parabelgleichung.

Lösungsweg 1

Eine Normalparabel hat die Gleichung $y=x^2+px+q$. Man setzt die Punkte $N_1(-2|0)$ und $N_2(4|0)$ ein, erhält zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, die man löst. Man erhält „p" und „q" und hat somit die Parabelgleichung. Es gibt einen besseren Weg:

Lösungsweg 2

Da wir von der Parabel beide Nullstellen kennen, ist die Linearfaktorform einer Parabel geschickt. $y=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

$a=1$, da es eine nach oben geöffnete Normalparabel ist.

$x_1=-2$ und $x_2=4$ sind die Nullstellen.

$\Rightarrow$ für die Parabel gilt: $y=1\cdot(x+2)\cdot(x-4)=x^2+2x-4x-8 \quad \Rightarrow \quad \underline{p: y=x^2-2x-8}$

Bestimmung der Gerade g:

Von der Geraden g kennen wir einen Punkt und die Steigung. Daher bietet sich sich die PSF an.

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1} \qquad m=-2 \text{ und } R(2{,}5|-4) \text{ einsetzen}$$

$$-2 = \frac{y-(-4)}{x-2{,}5} \qquad |\cdot(x-2{,}5)$$

$$-2\cdot(x-2{,}5) = y+4 \qquad \text{Klammer auflösen}$$

$$-2x+5 = y+4 \qquad |-4$$

$$-2x+1 = y \qquad \Rightarrow \qquad \underline{g: y = -2x+1}$$

Bestimmung der Schnittpunkte von p und g:

$$p = g$$

$$x^2-2x-8 = -2x+1 \qquad |+2x+8$$

$$x^2 = 9 \qquad |\sqrt{\ }$$

$$x = \pm 3$$

$x_1=3 \Rightarrow y_1=-2\cdot3+1=-5 \quad \Rightarrow$ erster Schnittpunkt: **P(3|-5)**

$x_2=-3 \Rightarrow y_2=-2\cdot(-3)+1=7 \quad \Rightarrow$ zweiter Schnittpunkt: **Q(-3|7)**

Lösung von P5

Die Berechnung der Funktionswerte erfolgt natürlich mit dem Taschenrechner.

Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	-4	-0,875	0	-0,625	-2	-3,375	-4	-3,125	0

Die Extrempunkte berechnet man, indem man $f'(x) = 0$ setzt.

Wir leiten wir f(x) zweimal ab [f''(x) brauchen wir jetzt eigentlich noch nicht, aber später].

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x-4$$

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2-\frac{6}{2}x+\frac{9}{2} = \frac{3}{8}x^2-3x+\frac{9}{2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{8}x-3 = \frac{3}{4}x-3$$

Die erste Ableitung Null setzen.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{3}{8}x^2-3x+\frac{9}{2} = 0 \qquad |\cdot 8 \qquad \text{(hässlichen Nenner weg machen)}$$

$$3x^2-24x+36 = 0$$

(p-q-Formel)

$$3x^2-24x+36 = 0 \qquad |:3$$

$$x^2-8x+12 = 0$$

(a-b-c-Formel)

$$3x^2-24x+36 = 0$$

$$x_{1,2}=\frac{24\pm\sqrt{24^2-4\cdot3\cdot36}}{2\cdot3} =$$

Sie sollten natürlich nur den Weg *entweder* über p-q-Formel *oder* über a-b-c-Formel rechnen.

$x_{1,2}=4\pm\sqrt{4^2-12}$ = $= \frac{24\pm\sqrt{144}}{6} =$

$= 4\pm2$ $= \frac{24\pm12}{6}$

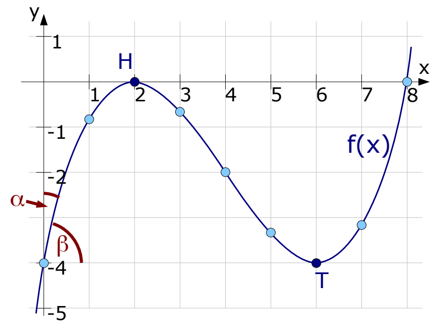
$x_1=6 \quad x_2=2$

Das sind die x-Werte der Extrema.

Die y-Werte liest man aus der Wertetabelle ab. $\Rightarrow$ **$EP_1(6|-4)$** **$EP_2(2|\ 0)$**

Untersuchung der Punkte auf Hoch- oder Tiefpunkte.

Dazu setzt man die x-Werte in f''(x) ein und überprüft das Vorzeichen.



x_1 in f''(x): $f''(6) = \frac{3}{4}\cdot6-3 = 1{,}5 > 0$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei **T(6 | -4)**

x_2 in f''(x): $f''(2) = \frac{3}{4}\cdot2-3 = -1{,}5 < 0$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei **H(2 | 0)**

Bestimmung des spitzen Winkels:

Den Winkel zwischen der y-Achse und einer Funktion [in der Skizze „α"] kann man nicht direkt berechnen.

Wir berechnen daher den Winkel zwischen der Funktion und der Horizontalen [in der Skizze ist das β]. Der gesuchte Winkel ist der Rest bis 90°.

Um den Winkel zwischen der Horizontalen und der Funktion zu berechnen, brauchen wir zwei Steigungen.

Die Steigung der Horizontalen ist natürlich $m_1=0$.

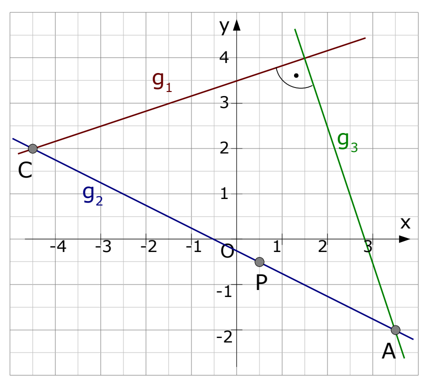
Die Steigung der Funktion berechnet man über die Ableitung der Funktion an der Stelle x=0 [bei der y-Achse]. $m_2=f'(0)=\frac{3}{8}\cdot0^2-3\cdot0+\frac{9}{2}=4{,}5$

Nun berechnen wir β: $\tan(\beta)=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}\right| = \left|\frac{4{,}5-0}{1+4{,}5\cdot0}\right| =4{,}5 \quad \Rightarrow \quad \beta=\tan^{-1}(4{,}5)=77{,}47°$

Der spitze Winkel zwischen y-Achse und dem Schaubild beträgt:

$\alpha = 90°-\beta = 90°-77{,}47° = 12{,}53°$ $\Rightarrow$ **$\alpha = 12{,}53°$**

Lösung von P6



Einzeichnen von g_1: Von der Geraden g_1 kennt man die Geradengleichung. Man zeichnet sie ein, indem man beim y-Achsenabschnitt von $^7/_2=3{,}5$ beginnt, und dann eine Steigung von $^1/_3$ einzeichnet.

Einzeichnen von g_2: Von g_2 kennt man die Punkte C und P. Zeichnet man die beiden Punkte ein, kann man sie zu g_2 verbinden.

Einzeichnen von g_3: Die Gerade g_3 geht durch A und hat die Steigung $m_3=-3$, da sie senkrecht auf der Geraden g_1 steht und somit die eine Steigung der negative Kehrwert der anderen Steigung ist. $m_1=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad m_3 = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3$.

Bestimmung der Geraden g_2 :

Man kennt zwei Punkte, also wendet man ZPF an:

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ C und P einsetzen

$\frac{-0{,}5-2}{0{,}5-(-4{,}5)} = \frac{y-2}{x-(-4{,}5)}$ zusammenrechnen

$\frac{-2{,}5}{5} = \frac{y-2}{x+4{,}5}$ linken Bruch kürzen, $| \cdot (x+4{,}5)$

$-\frac{1}{2}(x+4{,}5) = y-2$ Klammer auflösen

$-\frac{1}{2}x-\frac{9}{4} = y-2$ $| +2$

$-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} = y$ $\Rightarrow$ $\mathbf{g_2 : y = -\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}$

Bestimmung der Geraden g_3:

Von g_3 kennt man den Punkt A und die Steigung m_3=-3. Da verwendet man die PSF.

$m = \frac{y-y_A}{x-x_A}$ | m und A einsetzen

$-3 = \frac{y-(-2)}{x-3{,}5}$ zusammenrechnen

$-3 = \frac{y+2}{x-3{,}5}$ $| \cdot (x-3{,}5)$

$-3(x-3{,}5) = y+2$ vereinfachen

$-3x+10{,}5 = y+2$ $| -2$

$-3x+8{,}5 = y$ $\Rightarrow$ $\mathbf{g_3 : y=-3x+\frac{17}{2}}$

Den Schnittpunkt zweier Geraden bestimmt man durch Gleichsetzen.

$\frac{1}{3}x+\frac{7}{2} = -3x+\frac{17}{2}$ $| \cdot 6$

$2x+21 = -18x+51$ $| +18x-21$

$20x = 30$

$\Rightarrow x = 1{,}5$

Um y zu bestimmen setzt man x=1,5 in eine der Geraden ein.

x=4 in g_1: $y = \frac{1}{3}\cdot 1{,}5+\frac{7}{2} = 4$ $\Rightarrow$ **B(1,5 | 4)**

Wie zeigt man, dass der Punkt C auf der Gerade g_1 liegt? Man setzt die Koordinaten von C in g_1 ein und schaut, ob man eine wahre Aussage erhält.

C(-4,5|2) $\Rightarrow$ x_C=-4,5 und y_C=2

$g_1 : y = \frac{1}{3}x+\frac{7}{2}$ Koordinaten von C einsetzen

$2 = \frac{1}{3}(-4{,}5)+\frac{7}{2}$ ausrechnen

$2 = 2$ $\Rightarrow$ wahre Aussage $\Rightarrow$ **C liegt auf g_1**

Zum Schluss brauchen wir noch den prozentualen Unterschied zwischen der Länge von $\overline{PA}$ und der Länge von $\overline{PC}$.

Die Streckenlänge $\overline{PA}$ bestimmt man mit der Entfernungsformel:

$$d(P,A) = \sqrt{(x_A-x_P)^2+(y_A-y_P)^2} = \sqrt{(3{,}5-0{,}5)^2+(-2-(-0{,}5))^2} =$$
$$= \sqrt{3^2+(-1{,}5)^2} = \sqrt{11{,}25} \approx 3{,}35$$

Die Streckenlänge $\overline{PC}$ bestimmt man ebenso:

$$d(P,C) = \sqrt{(x_C - x_P)^2 + (y_C - y_P)^2} = \sqrt{(-4{,}5 - 0{,}5)^2 + (2 - (-0{,}5))^2} =$$
$$= \sqrt{(-5)^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{31{,}25} \approx 5{,}59$$

Nun zur Frage: Um wieviel Prozent ist die Strecke $\overline{PA}$ kürzer als die der Strecke $\overline{PC}$?

Anders gefragt: Um wieviel Prozent ist 3,35 größer als 5,59?

Der Unterschied beträgt: 5,59–3,35 = 2,24

Der prozentuale Unterschied beträgt: $\frac{2{,}24}{5{,}59} \cdot 100\,\% \approx$ **40,07%**

[Man könnte natürlich auch den Dreisatz verwenden.]

Lösung von P7

Zum einen: Wenn zum Schluss für fünf Patronen 205,20€ bezahlt werden, liegt der Preis für eine Patrone 205,20:5 = 41,04€.

Über den Dreisatz wird die Lösung etwas kompliziert.

Besser wird der Ansatz über $K_2 = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2$.

[Zwar haben wir hier nicht mehrere Jahre, aber für die Formel ist das egal. Es gibt mehrere „Schritte", da geht die Formel auch. Im ersten Schritt wird die Mehrwertsteuer von 16% auf den Preis drauf gelegt, also ist p_1=16%. Im zweiten Schritt wird auf den Preis ein Skonto (d.h. Rabatt bzw. Preisnachlass) gegeben. Da gilt p_2=-2%]

K_2=41,04€ $\quad q_1 = 1 + \frac{p_1}{100} = 1 + \frac{16}{100} = 1{,}16 \quad q_2 = 1 + \frac{p_2}{100} = 1 + \frac{-2}{100} = 0{,}98$

Aus $K_2 = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2$ wird damit:

$41{,}04€ = K_0 \cdot 1{,}16 \cdot 0{,}98 \qquad |:1{,}16:0{,}98$

$36{,}10€ = K_0$

Der Anfangswert=Katalogpreis für eine Patrone liegt bei 36,10€.

Lösung von P8

Corinnas Vermögen berechnet man als Zinseszinsrechnung mit unterschiedlichen Zinssätzen [für drei Jahre]. $K_3 = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$.

Es gilt K_0=4.500,00€ $\quad q_1 = 1 + \frac{p_1}{100} = 1 + \frac{1{,}5}{100} = 1{,}015$

$q_2 = 1 + \frac{p_2}{100} = 1 + \frac{2{,}25}{100} = 1{,}0225 \quad q_3 = 1 + \frac{p_3}{100} = 1 + \frac{2{,}75}{100} = 1{,}0275$

$K_3 = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 4500{,}00 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}0225 \cdot 1{,}0275 = 4798{,}70$ €

Corinna hat nach drei Jahren 4.798,70€.

Hans hat ebenfalls 4.500,00€

Für die ersten beiden Jahre erhält er 45,00€ bzw. 91,43€ Zinsen.

Also hat er nach zwei Jahren K_2=4.500,00+45,00+91,43=4.636,43€

Ein Jahr später soll er 4.798,70€ haben [wie Corinna].

Also bekommt er im dritten Jahr 4.798,70–4.636,43=162,27€ Zinsen.

Mit dem Dreisatz berechnen wir, welchem Zinssatz das entspricht.

4636,43€ 100%
162,27€ x

Über Kreuz multiplizieren …

$\Rightarrow$ 4636,43€·x = 162,27€·100% $\Rightarrow$ $x = \frac{162{,}27\,€ \cdot 100\,\%}{4636{,}43\,€} = 3{,}50\%$

Hans muss im dritten Jahr einen Zinssatz von 3,5% bekommen.

Wahlteil

Lösung von W2 a)

In der Aufgabenstellung hat man eine unvollständige Wertetabelle gegeben.

Interessant davon sind nur die beiden Spalten, in denen „x-“ und „y-Wert“ gegeben ist, die liefern uns nämlich die beiden Punkte P(-2|3) und Q(0|3).

Da es sich um eine nach oben geöffnete Normalparabel handelt, ist unser Ansatz für die Parabel $p_1 : y = x^2+px+q$

Bei diesem Ansatz braucht man zwei Punkte, die man in die Parabelgleichung einsetzt, um die Parameter „p“ und „q“ zu erhalten.

P in p_1 : $3 = (-2)^2+p\cdot(-2)+q \Rightarrow 3 = 4-2p+q$

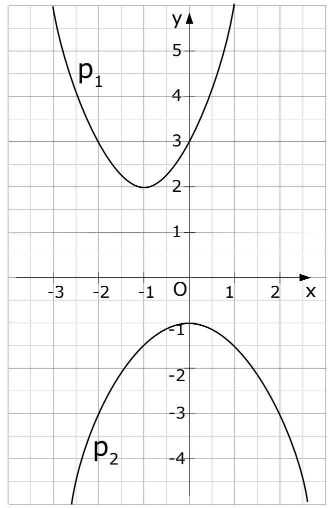
Q in p_1 : $3 = 0^2+p\cdot 0+q \Rightarrow 3 = q$

q=3 in erste Gleichung einsetzen:

$\Rightarrow 3=4-2p+3 \Rightarrow 3=7-2p \Rightarrow -4=-2p \Rightarrow p=2$

Einsetzen von p=-10 und q=17 in die Parabelgleichung

$\Rightarrow p_1 : y=x^2+2x+3$



Nun kann man die Wertetabelle vervollständigen.

Dazu setzt man die x-Werte in die Parabelgleichung ein

[und tippt ein bissl auf dem Taschenrechner rum].

Wertetabelle: von p_1							
	x	-3	-2	-1	0	1	2
	y	6	3	2	3	6	11

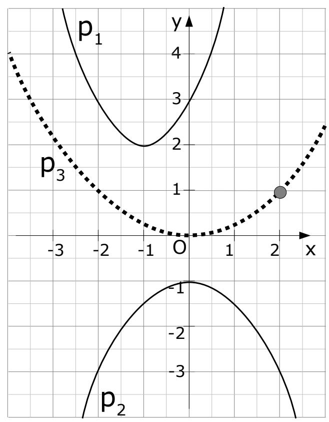
Einzeichnen der Parabeln:

p_1 ist einfach, denn davon haben wir die Wertetabelle. Punkte einzeichnen und verbinden.

Von p_2 haben wir nur die Gleichung: $y=-\frac{1}{2}\cdot x^2-1$

Zum Zeichnen macht man am einfachsten eine Wertetabelle [es gibt noch mehr Möglichkeiten]:

Wertetabelle: von p_2								
	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y	-5,5	-3	-1,5	-1	-1,5	-3	-5,5



Die Parabel p_3 hat die Form $y=ax^2$, hat ihren Scheitel also im Ursprung. Nun soll sie ja weder p_1 noch p_2 schneiden. Also skizziert man am besten zuerst eine Parabel, die das erfüllt. Um von der Skizze auf die Parabelgleichung zu kommen, könnte man aus der Skizze irgend einen Punkt ablesen und in $y=ax^2$ einsetzen. In der rechts skizzierten Parabel von p_3 könnte man z.B. den Punkt P(2|1) ablesen.

Also setzt man x=2 und y=1 in „$y=ax^2$“ ein und erhält:

$1=a\cdot 2^2 \Rightarrow 1=4a \Rightarrow a=\frac{1}{4}$. p_3 würde also lauten: $y=\frac{1}{4}\cdot x^2$

Das ist natürlich nur eine von vielen Möglichkeiten für p_3.

Falls Sie für **„a“** einen Wert erhalten, der **zwischen „-0,5“ und „0,577“** liegt, haben Sie alles richtig gemacht.

Überprüfen durch Rechnung:

Schnitt von $p_1:y=x^2+2x+3$ mit $p_3:y=\frac{1}{4}x^2$

$$p_1 = p_3$$

$$x^2+2x+3 = \tfrac{1}{4}x^2 \quad | -\tfrac{1}{4}x^2$$

$$0{,}75x^2+2x+3 = 0$$

(p-q-Formel) (a-b-c-Formel)

$0{,}75x^2+2x+3 = 0 \quad |:0{,}75$ $\qquad 0{,}75x^2+2x+3 = 0$

$x^2+\frac{8}{3}x+4 = 0$

$x_{1,2}=-\frac{4}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2-4} =$

$= -\frac{4}{3}\pm\sqrt{-\frac{20}{9}}$

$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 0,75\cdot 3}}{2\cdot 0,75} =$

$= \frac{-2\pm\sqrt{-5}}{1,5}$

Unter der Wurzel steht was Negatives, es gibt keine Lösung, es gibt also keine Schnittpunkte von p_1 und p_3.

Schnitt von $p_2{:}y=-\frac{1}{2}x^2-1$ mit $p_3{:}y=\frac{1}{4}x^2$

$p_2 = p_3$

$-\frac{1}{2}x^2-1 = \frac{1}{4}x^2 \qquad | +\frac{1}{2}x^2$

$-1 = \frac{3}{4}x^2$

$-\frac{4}{3} = x^2$

Die Wurzel aus einer negativen Zahl kann man nicht ziehen, es gibt also auch keine Schnittpunkte von p_2 und p_3.

Lösung von W2 b)

Wenn ein Punkt auf einer Parabel liegt, kann man die Koordinaten des Punktes in die Parabel einsetzen [=Punktprobe]. [Wir müssen streng genommen noch nicht einmal weiter denken, wir müssen also noch nicht einmal wissen, wozu das gut ist, was wir tun.]

A(-1|2) liegt auf $p_1{:}y=x^2+px-1$, also setzen wir x=-1 und y=2 in p_1 ein.

$\Rightarrow 2=(-1)\ 2+p\cdot(-1)-1 \Rightarrow 2=1-p-1 \Rightarrow 2=-p \Rightarrow p=-2.$

Damit haben wir die Gleichung von p_1. $\Rightarrow$ $p_1{:}y=x^2-2x-1$

A(-1|2) liegt auf $p_2{:}y=-x^2+c$, also setzen wir x=-1 und y=2 in p_2 ein.

$\Rightarrow 2=-(-1)^2+c \Rightarrow 2=-1+c \Rightarrow c = 3.$

Damit haben wir die Gleichung von p_2. $\Rightarrow$ $p_2{:}y=-x^2+3$

Die Aufgabe lautet, den zweiten Schnittpunkt der Parabeln zu bestimmen.

$p_1 = p_2$

$x^2-2x-1 = -x^2+3 \qquad |+x^2-3$

$2x^2-2x-4=0$

(p-q-Formel)

$2x^2-2x-4 = 0 \quad |:2$

$x^2-x-2 = 0$

$x_{1,2}=0,5\pm\sqrt{0,5^2-(-2)} =$

$= 0,5\pm\sqrt{2,25} =$

$= 0,5 \pm 1,5$

(a-b-c-Formel)

$2x^2-2x-4 = 0$

$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 2\cdot(-4)}}{2\cdot 2} =$

$= \frac{2\pm\sqrt{36}}{4} =$

$= \frac{2\pm 6}{4} =$

$x_1=2 \qquad x_2=-1$

$x_2=-1$ ist der x-Wert des Punktes A. Der Punkt interessiert uns nicht.

$x_1=2$ ist der Punkt der uns interessiert. Den y-Wert bestimmen wir durch Einsetzen [z.B. in die Gleichung von p1]: $y=2^2-2\cdot 2-1=-1$ $\Rightarrow$ **B(2|-1)**.

Lucas Behauptung:

Es geht auf jeden Fall um die Scheitelpunkte der beiden Parabeln, also wäre es wohl schlau, diese auch zu berechnen [erste Ableitung Null setzen]:

Scheitelpunkt von p_1:

$y=x^2-2x-1 \Rightarrow y'=2x-2$

$y'=0 \;\Rightarrow\; 2x-2=0 \;\Rightarrow\; x=1 \;\Rightarrow\; y=1^2-2\cdot1-1=-2 \qquad\Rightarrow\qquad \underline{S_1(1|-2)}$

Scheitelpunkt von p_2:

$y=-x^2+3 \Rightarrow y'=-2x$

$y'=0 \;\Rightarrow\; -2x=0 \;\Rightarrow\; x=0 \;\Rightarrow\; y=-0^2+3=3 \qquad\Rightarrow\qquad \underline{S_2(0|3)}$

Nun sollen die Gerade S_1B und S_2A parallel sein. Zwei Geraden sind parallel, wenn beide Steigungen gleich sind. Also berechnen wir die Steigung von S_1B und S_2A und hoffen das gleiche Ergebnis zu erhalten.

Steigung von S_1B: [$S_1(1|-2)$ und $B(2|-1)$]

$$m_{S1B}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-1-(-2)}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$$

Steigung von S_2A: [$S_a(0|3)$ und $A(-1|2)$]

$$m_{S1B}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-3}{-1-0} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Beide Steigungen sind gleich .

⇒ Luca ist der absolute Checker und hat´s voll drauf!

Lösung von W3 a)

Eine Gerade, die parallel zur x-Achse verläuft, hat die Gleichung $y=c$. Damit hat auch die Gerade h, von der am Anfang der Aufgabe die Rede ist, die Gleichung $y=c$. Diese Gerade soll nun durch den Tiefpunkt von K_f verlaufen, der [laut Aufgabe P5] die Koordinaten $T(6|-4)$ hatte. Der y-Wert beträgt $y=-4$ ⇒ $\underline{h : y=-4}$

Die Gerade h schneidet nun K_f. Also setzt man beide gleich.

$$K_f = h$$

$\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x-4 = -4 \qquad | +4$

$\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x = 0 \qquad | \cdot8$

$x^3-12x^2+36x = 0 \qquad$ „x" ausklammern

$x\cdot(x^2-12x+36) = 0 \qquad$ Satz vom Nullprodukt

$x_1=0 \qquad\qquad x^2-12x+36=0$

$x^2-12x+36=0$

(p-q-Formel) (a-b-c-Formel)

$x^2-12x+36 = 0 \qquad\qquad x^2-12x+36 = 0$

$x_{1,2}=6\pm\sqrt{6^2-36} = \qquad\qquad x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{12^2-4\cdot1\cdot36}}{2\cdot1} =$

$= 6\pm\sqrt{0} \qquad\qquad = \frac{12\pm\sqrt{0}}{2}$

$x_{2,3}=6$

Da laut Aufgabenstellung gelten soll: $x_1\leqslant0$, passt bei uns die Nummerierung zufällig, es gilt also $x_1=0$, $x_{2,3}=6$.

Die Berechnung der y-Werte wird einfach, wenn die x-Werte in die Gerade $y=-4$ eingesetzt werden [alle y-Werte sind -4]. ⇒ $\mathbf{S_1(0|-4)}$ $\mathbf{S_{2,3}(6|-4)}$

Für die Tangente t w im Wendepunkt, brauchen wir natürlich zuerst den Wendepunkt von K_f. In Aufgabe P5 des Pflichtteils hatten wir bereits die zweite Ableitung berechnet: $f''(x) = \frac{3}{4}x - 3$, die muss Null gesetzt werden: $\frac{3}{4}x - 3 = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}x = 3 \Rightarrow x = 4$.

Der x-Wert des Wendepunkts ist 4, den y-Wert entnimmt man der Wertetabelle ⇒ y=-2

Nun berechnen wir noch die Steigung der Tangente, indem wir den x-Wert in die erste Ableitung einsetzen:

$m_t = f'(4) = \frac{3}{8} \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}$

Mit den Koordinaten von W und der Tangentensteigung m_t wendet man die PSF an und erhält die Tangentengleichung.

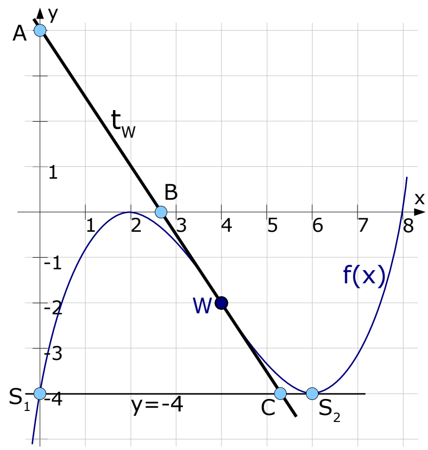
$m = \frac{y - y_W}{x - x_W}$ | m und W einsetzen

$-\frac{3}{2} = \frac{y - (-2)}{x - 4}$ | · (x–4)

$-\frac{3}{2} \cdot (x-4) = y+2$ Klammer auflösen

$-\frac{3}{2}x + 6 = y+2$ | –2

$-\frac{3}{2}x + 4 = y$ ⇒ $t_W : y = -\frac{3}{2}x + 4$



Wir brauchen noch die Punkte A, B und C.

A ist der Schnittpunkt der Tangente t_w mit der y-Achse. Die x-Koordinate ist also Null.

x=0 in t_w: $y = -\frac{3}{2} \cdot 0 + 4 = 4$

A ist der Schnittpunkt der Tangente t_w mit der y-Achse. Die x-Koordinate ist also Null.

x=0 in t w : y= − 2 ·0 +4 =4 ⇒ $A(0|4)$

B ist der Schnittpunkt der Tangente t_w mit der x-Achse.

Die y-Koordinate ist also Null. y=0 in t_w : $0 = -\frac{3}{2} \cdot x + 4 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$ $B\left(\frac{8}{3}\middle|0\right)$

C ist der Schnittpunkt der Tangente t_w mit h [y=-4].

Gleichsetzen liefert: $t_w = h \Rightarrow -\frac{3}{2}x + 4 = -4 \Rightarrow -\frac{3}{2}x = -8 \Rightarrow x = \frac{16}{3}$

[Der y-Wert ist „-4", wie man am besten aus h:y=-4 erkennen kann.] ⇒ $C\left(\frac{16}{3}\middle|-4\right)$

Nun haben wir die Koordinaten der Punkte A, B, C, S_1 und S_2.
Wir können damit die Flächeninhalte der Dreiecke bestimmen.
Fläche des Dreiecks S_1BA mit: $S_1(0|-4)$, $B\left(\frac{8}{3}\middle|0\right)$, $A(0|4)$:

Wenn man S_1A als Grundlinie wählt, ist die Höhe des Dreiecks ausgerechnet der x-Wert des Punktes B

⇒ $g = |S_1A| = y_A - y_{S1} = 4-(-4) = 8$

⇒ $h = x_B = \frac{8}{3}$

⇒ Flächeninhalt: $A_{\Delta S1BA} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$

Fläche des Dreiecks S_1CB mit: $S_1(0|-4)$, $C\left(\frac{16}{3}\middle|-4\right)$, $B\left(\frac{8}{3}\middle|0\right)$:

Wenn man S_1C als Grundlinie wählt, ist die Höhe des Dreiecks der Abstand der Gerade y=-4 zu der x-Achse, also „4" ⇒ h=4

⇒ $g = |S_1C| = \frac{16}{3} - 0 = \frac{16}{3}$

⇒ Flächeninhalt: $A_{\Delta S1CB} = ½ \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} \cdot 4 = \frac{32}{3}$

Wow! Beide Flächeninhalte sind gleich!!

Lösung von W4 a)

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, wenn zwei Seiten gleich lang sind.

Also berechnen wir alle Seitenlängen und hoffen, dass zwei gleich lang sind.

[Zur Erinnerung: A(3,5|-2) B(1,5|4) C(-4,5|2)]

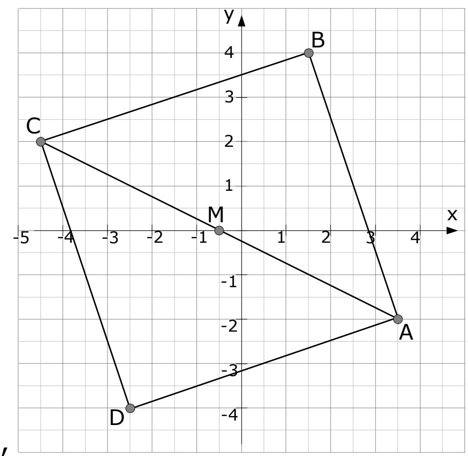
$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1{,}5 - 3{,}5)^2 + (4 - (-2))^2} = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40}$$

$$|BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-4{,}5 - 1{,}5)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{40}$$

$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-4{,}5 - 3{,}5)^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{(-8)^2 + 4^2} = \sqrt{80}$$

Welch ein Glück! $|AB| = |BC|$ ⇒ **ABC ist gleichschenklig.**

Den Punkt D so bestimmen, dass ABCD ein Quadrat ist.



Lösungsweg 1 [hässlich]:

Wir bestimmen die Gleichung der Gerade, die parallel zu BC ist und durch A geht [über PSF]. Danach bestimmen wir die Gleichung der Gerade, die parallel zu AB ist und durch C geht. Beide Geraden schneidet man und erhält D.

Lösungsweg 2 [geschickt]:

Wir bestimmen den Mittelpunkt von AC und spiegeln danach B an diesem Mittelpunkt.

Mittelpunkt von A und C:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3{,}5 + (-4{,}5)}{2} = -0{,}5$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2 + 2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{M(-0{,}5|0)}$$

Um D zu bestimmen, verwenden wir die Idee, dass M die Mitte von B und D ist [„umgekehrte Mittelpunktsformel“].

Wir lösen die normale Mittelpunktsformel nach den Koordinaten von D auf.

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow 2 \cdot x_M = x_B + x_D \Rightarrow x_D = 2 \cdot x_M - x_B = 2 \cdot (-0{,}5) - 1{,}5 = -2{,}5$$

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow 2 \cdot y_M = y_B + y_D \Rightarrow y_D = 2 \cdot y_M - y_B = 2 \cdot 0 - 4 = -4 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D(-2{,}5|-4)}}$$

Mittelpunkt und Radius des Umkreises des Quadrats:

Der Mittelpunkt des Umkreises ist natürlich der Punkt M, den wir ein paar Zeilen weiter oben bereits errechnet haben. ⇒ $\underline{\underline{M(-0{,}5|0)}}$

Der Radius des Umkreises ist der Abstand von M zu einem beliebigen Eckpunkt.

$$r = |AM| = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(1{,}5 - 3{,}5)^2 + (0 - (-2))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} \Rightarrow \mathbf{r = \sqrt{20}}$$

Um wieviel Grad ist das Quadrat gegenüber der x-Achse gedreht?

Wir könnten dafür einfach schauen, um wieviel Grad die Seite BC gegenüber der x-Achse gedreht ist [man könnte auch jede andere Quadratseite wählen]. Dafür bestimmen wir den Winkel zwischen der Seite BC und der x-Achse.

Das machen wir mit der Schnittwinkel–Formel, wofür wir wiederum die Steigungen brauchen. Die Steigung der x-Achse ist natürlich „0“ und die Steigung von BC haben wir geschickter Weise bereits seit Aufgabe P6, die Gerade BC hieß dort g_1 und hatte die Steigung von „$^1/_3$“.

$$\Rightarrow \tan(\beta) = \left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}\right| = \left|\frac{\frac{1}{3}-0}{1+\frac{1}{3}\cdot 0}\right| = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \beta=\tan^{-1}(^1/_3)=18{,}43°$$

Das Quadrat ist gegenüber der x-Achse um 18,43° gedreht.

[Über einen anderen Rechenweg hätte man einen Winkel von 71,57° erhalten. Ist auch in Ordnung.]

Fragen die von der Menschheit dringends geklärt werden sollten!

Ist ein Raumschiff, das ausschließlich mit Frauen besetzt ist, eigentlich unbemannt?

Sind nymphomane Hündinnen zwangsläufig?

Wie lange muss eine Katze trainieren, um einen Muskelkater zu bekommen?

Gibt es in einer Teefabrik Kaffeepausen?

Wenn Schwimmen schlank macht, was machen Blauwale falsch?

Wenn die Stiftung Warentest Vibratoren testet, ist dann 'befriedigend' besser als 'gut'?

Wenn ein Schäfer seine Schafe verhaut, ist er dann ein Mähdrescher?

Warum muss man für den Besuch beim Hellseher einen Termin haben?

Welche Farbe bekommen Schlümpfe, wenn man sie würgt?

Warum werden Rundschreiben in einem eckigen Umschlag verschickt?

Ist eine Gesichtscreme, die 20 Jahre jünger macht, lebensgefährlich, wenn man erst 19 Jahre alt ist?

Darf sich jemand, der sich im Ruhestand befindet, nachts hinlegen?

Warum ist ein Kreiskrankenhaus nicht rund?

Darf man eine Tagesdecke auch nachts benutzen?

Geht der Meeresspiegel kaputt, wenn man in See sticht?

Wie lange kriegt man für einen Wintereinbruch, oder gibt es darauf Bewährung?

Darf man in einem Schaltjahr auch Automatik fahren?

Wenn Katholiken auf eine Demonstration gehen, sind sie dann Protestanten?

Ist Lattenrost eine Geschlechtskrankheit?

Wenn man beim Augenarzt „Auf Wiedersehen“ sagt, war die Behandlung dann erfolgreich?

Und die wichtigste Frage des Tages:
Warum muss ich auf Start drücken, um Windows zu beenden ???