Prüfung 2016

Pflichtbereich

Aufgabe P 1: *(aus Waldorf-RAP)*

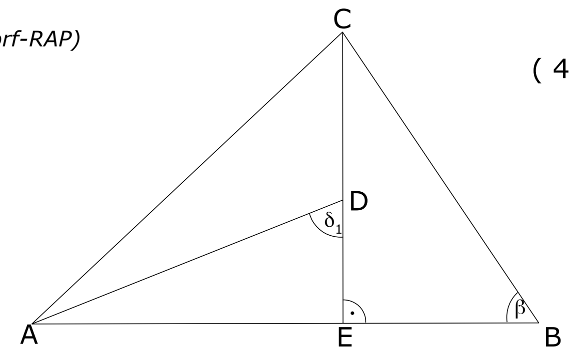
(4 P)

Gegeben ist das Dreieck ABC.

Es gilt:

$\overline{BC} = 9{,}0$ cm
$\overline{AD} = 7{,}3$ cm
$\beta = 55{,}0°$
$\delta_1 = 69{,}4°$

Berechnen Sie die Länge $\overline{CD}$
und den Flächeninhalt des Dreiecks ADC.



Aufgabe P 2: *(aus Waldorf-RAP)*

(4 P)

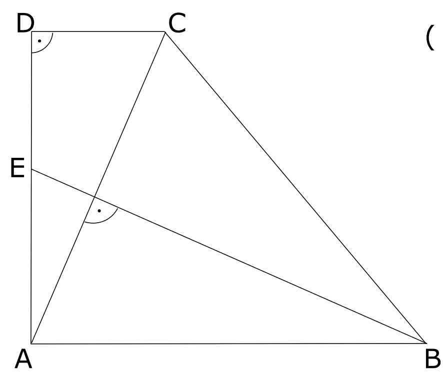
Im rechtwinkligen Trapez ABCD
sind gegeben:

$\overline{AE} = 3{,}1$ cm

$\overline{BE} = 8{,}4$ cm

$\overline{AB} = \overline{BC}$

Berechnen Sie den Umfang des
Dreiecks ACD.



Aufgabe P 3: *(aus Waldorf-RAP)*

Geben Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Gleichung an.

$$\frac{x+3}{x} = \frac{9}{x^2-3x} - \frac{3}{x-3}$$

(3,5 P)

Aufgabe P 4: *(aus Waldorf-RAP)*

(3,5 P)

Die Parabel p hat die Gleichung $y=x^2-6x+10{,}5$
Eine Gerade g mit der Steigung $m=2$ geht durch den Scheitelpunkt der Parabel p.

Berechnen Sie die Koordinaten des zweiten Schnittpunkts Q der Parabel p und der Geraden g.

Aufgabe P 5: *(aus Waldorf-RAP)*

(7,5 P)

Eine Funktion f hat die Gleichung:

$$f(x)=\frac{5}{27}x^3-\frac{5}{9}x^2-\frac{5}{3}x+5$$

Ihr Schaubild sei K_f.

Berechnen Sie die Funktionswerte für alle ganzzahligen Werte von x im Bereich $-3 \leqslant x \leqslant 5$.

Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte von K_f.

Untersuchen Sie diese Extrempunkte auf Hoch- und Tiefpunkte.

Tragen Sie die berechneten Werte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein und zeichnen Sie K_f (1 LE = 1 cm).

Aufgabe P 6: *(aus Waldorf-RAP)*

(7,5 P)

Die Gerade g_1 hat die Gleichung $y=-\frac{1}{4}x+2$.

Die Gerade g_2 geht Punkte A(2|-7) und P(-2,5|0,5).

Die Gerade g_3 durch den Punkt A und ist parallel zur Geraden h mit der Gleichung $y=4x+2$.

Zeichnen Sie die Geraden in ein rechtwinkliges Koordinatensystem (1LE=1cm) ein.

Berechnen Sie die Gleichungen der Geraden g_2 und g_3.

Zeigen Sie, dass der Punkt C(-4|3) auch auf den Geraden g_1 und g_2 liegt.

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes B von g_1 und g_3.

Berechnen Sie den kleineren Winkel zwischen den Geraden g_3 und der x-Achse.

Um wie viel Prozent ist dieser Winkel kleiner als 90°?

Aufgabe P 7:

(aus staatlicher-RAP 2007)

(2 P)

Ein Guthaben von 5.000,00 € wird für drei Jahre angelegt.
Zinsen werden mitverzinst.
Die Zinssätze der ersten beiden Jahre sind:

Zinssatz im 1. Jahr: 2,5%
Zinssatz im 2. Jahr: 3,25%

Für die drei Jahre werden insgesamt 503,23 € Zinsen gutgeschrieben.
Wie hoch ist der Zinssatz im dritten Jahr?
Bei welchem jährlich gleichbleibenden Zinssatz wäre nach drei Jahren das gleiche Endkapital erzielt worden?

Aufgabe P 8:

(aus staatlicher-RAP 2007)

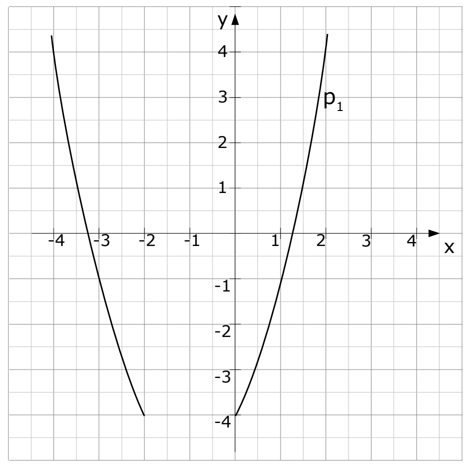
(2 P)

Der Mehrwertsteuersatz wurde in Deutschland am 01.01.2007 von 16% auf 19% angehoben.
Der Endpreis eines Mountainbikes hat sich dadurch um 40,50 € erhöht.
Wie viel Euro kostet jetzt das Mountainbike einschließlich der Mehrwertsteuer?
Guido behauptet: Der Endpreis hat sich durch die Erhöhung der Mehrwertsteuer um 3% erhöht.
Überprüfen Sie diese Behauptung.

Wahlbereich

Aufgabe W 2: *(aus Waldorf-RAP)*

a) Das Schaubild zeigt einen Ausschnitt der verschobenen Normalparabel p_1. (5,5 P)



Die Punkte A(-3|-1) und B(1|-1) liegen auf p_1.

Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel p_1.

Die nach unten geöffnete Normalparabel p_2 hat den Scheitelpunkt $S_2(0|8)$.

Durch die beiden Scheitelpunkte verläuft eine Gerade g.

Berechnen Sie die Gleichung der Geraden g.

Eine Gerade h verläuft parallel zu g und geht durch einen der beiden Schnittpunkte von p_1 und p_2.

Berechnen Sie eine mögliche Gleichung der Geraden h.

b) Eine Parabel p_1 hat die Gleichung $y=\frac{1}{4}x^2+c$ und geht durch den Punkt R(4|0). (4,5 P)

Eine nach unten geöffnete Normalparabel p_2 hat die Gleichung $y=-x^2+1$.

Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q von p_1 und p_2.

Die Scheitelpunkte S_1 und S_2 sowie die Schnittpunkte P und Q der beiden Parabeln bilden das Viereck S_1PS_2Q.

Mia behauptet: „Das Viereck S_1PS_2Q hat zwei rechte Winkel."
Hat Mia Recht?
Begründen Sie Ihre Aussage durch Rechnung.

Aufgabe W 3: *(aus Waldorf-RAP)*

a) Gegeben ist die Funktionsgleichung von Aufgabe P5 des Pflichtbereichs:

$$f(x)=\frac{5}{27}x^3-\frac{5}{9}x^2-\frac{5}{3}x+5$$

(6,5 P)

Die Gerade g geht durch den Schnittpunkt von K_f mit der y-Achse und ist parallel zur x-Achse.

Sie schneidet K_f in den drei Punkten $S_1(x_1|y_1)$, $S_2(x_2|y_2)$ und $S_3(x_3|y_3)$ mit $x_1<x_2<x_3$.

Berechnen Sie die Koordinaten dieser Schnittpunkte.

Die Tangente t an K_f berührt K_f in S_2.

Zeigen Sie, dass t durch den Tiefpunkt T von K_f geht.

Die Gerade h geht durch T und S_3.

Berechnen Sie den spitzen Winkel zwischen t und h.

Das Dreieck mit den Eckpunkten T, S_2 und S_1 hat den Flächeninhalt A_1. Berechnen Sie diesen Flächeninhalt.

Das Dreieck mit den Eckpunkten T, S_3 und S_2 hat den Flächeninhalt A_2. Wie viel Prozent von A_2 beträgt der Flächeninhalt A_1?

Aufgabe W 4: *(aus Waldorf-RAP)*

a) Gegeben sind die Punkte A(2|-7), B(4|1) und C(-4|3) aus der Aufgabe P6 des Pflichtbereichs. (6,5 P)

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.

Bestimmen Sie den Punkt D rechnerisch so, dass das Viereck ABCD ein Quadrat bildet.

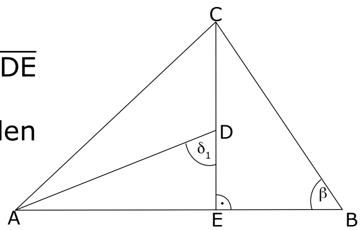
Berechnen Sie den Umkreisradius des Quadrats ABCD.

Der Punkt B liegt auf einer Geraden i und ist beweglich.

Bestimmen Sie die Gleichung von i so, dass das Viereck ABCD ein Drachen ist.

Tipps und Ergebnisse:

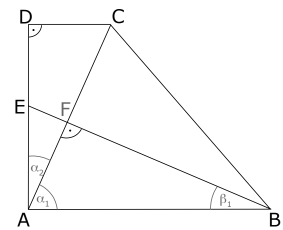
Tipps zu P1:



-In den Dreiecken BCE und ADE die Strecken $\overline{CE}$ und $\overline{DE}$ berechnen. Die Differenz davon ist $\overline{CD}$.
-Im Dreieck ADE $\overline{AE}$ berechnen. Damit und mit $\overline{CD}$ den Flächeninhalt des Dreiecks ADC bestimmen.

Ergebnisse in Kurzformat: $\overline{CE}=7,37$ $\overline{DE}=2,57$
$\overline{AE}=6,83$ $\overline{CD}=4,8$ $A_{\Delta ADC}=16,39$

Tipps zu P2:



-Im Dreieck BEA über $\overline{AE}$ und $\overline{AB}$: $\overline{AB}$ und β_1 berechnen.
-Im Dreieck ABF über $\overline{AB}$ und β_1: $\overline{AF}$ und α_1 berechnen.
-$\overline{AC}$ über $\overline{AF}$ berechnen, α_2 über α_1 berechnen.
-Im Dreieck ACD über $\overline{AC}$ und α_2: $\overline{CD}$ und $\overline{AD}$ berechnen.

Ergebnisse in Kurzformat: $\overline{AB}=\overline{BC}=7,81$ $\beta_1=21,66°$ $\alpha_1=68,34°$
$\alpha_2=21,66°$ $\overline{AF}=2,88$ $\overline{AC}=5,76$ $\overline{CD}=2,13$ $\overline{AD}=5,35$ $U_{ACD}=13,24$

Tipps zu P3:
-Definitionsmenge: jeden einzelnen Nenner Null setzen.
-Lösungsmenge: unten ausklammern, mit dem Hauptnenner multiplizieren.
Die entstehende Gleichung mit p-q-Formel / a-b-c-Formel lösen.

Ergebnisse in Kurzformat: $D = \mathbb{R}\backslash\{0;3\}$ $L = \{-6\}$

Tipps zu P4:
- Die Koordinaten des Scheitelpunktes bestimmen [die Ableitung der Parabel Null setzen].
- Mit der Steigung und dem Scheitelpunkt die Geradengleichung von g bestimmen.
- Die Schnittpunkte von p und g durch Gleichsetzen berechnen.

Ergebnisse in Kurzformat: S(3|1,5) g:y=2x–4,5 Q(5|5,5)

Tipps zu P5:
-Die x-Werte der Extrema erhält man, indem man die erste Ableitung Null setzt.
Die y-Werte erhält man durch Einsetzen von x in f(x).
-Ob´s ein Hoch- oder Tiefpunkt ist, erhält man, indem man die x-Werte in die zweite Ableitung einsetzt. [Ist das Ergebnis negativ, so ist´s ein Hochpunkt und umgekehrt].

Ergebnisse in Kurzformat:

Wertetabelle:	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
	0	4,63	5,93	5	2,96	0,93	0	1,30	5,93

HP(-1|5,93)
TP(3 | 0)

Tipps zu P6:

-Zeichnen: Blatt, Geodreieck, Stift greifen. Punkte einzeichnen und verbinden...
-Die Gerade g_2 über ZPF berechnen [mit Punkt A und P].
-Die Gerade g_3 über PSF berechnen [die Steigung von g_3 ist die gleiche wie die von h].
-C liegt auf g_1 und g_2, wenn die Punktprobe stimmt [x- und y-Wert von C in g_1 und g_2 einsetzen].
-Den Schnittpunkt B erhält man durch Gleichsetzen von g_1 und g_3 ($g_1=g_3$).
-Den Schnittwinkel erhält man über die Schnittwinkelformel. Mit dem Dreisatz [oder Ähnlichem] den prozentualen Unterschied berechnen.

Ergebnisse in Kurzformat: $g_2: y=-\frac{5}{3}x-\frac{11}{3}$ $g_3: y=4x-15$, B(4|1), $\alpha=75{,}96°$, 15,6% kleiner.

Tipps zu P7:

-Einerseits ist K_3 die Summe aus Anfangskapital und gesamten Zinsen, andererseits gilt $K_3=K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$. Daraus kann man q_3 und p_3 berechnen.
-Einen gleichbleibenden Zinssatz berechnet man mit $K_n=K_0 \cdot q^n$. Nach q auflösen und dann p bestimmen.

Ergebnisse in Kurzformat: Der Zinssatz im dritten Jahr beträgt 4,0%.
Der gleichbleibende Zinssatz müsste 3,2% betragen.

Tipps zu P8:

-Die Preiserhöhung von 40,50€ entspricht 3% des Grundpreises [ohne Mehrwertsteuer]. Der gesuchte Endpreis des Mountainbikes entspricht 119%, was man mit dem Dreisatz errechnet.

Ergebnisse in Kurzformat: Das Mountainbike kostet 1606,50€.
Guidos Behauptung ist falsch (die Erhöhung beträgt 2,6%).

Tipps zu W2 a)

- Eine verschobene Normalparabel hat die Form $y=x^2+px+q$.
  Man setzt die Punkte A und B ein, erhält p und q und damit die Parabelgleichung.
- Den Scheitelpunkt von p_1 über die Nullstelle der ersten Ableitung bestimmen.
- Mit den Scheitelpunkten der beiden Parabeln bestimmt man die Gleichung der Gerade g [über PSF].
- die Gleichung der Parabel p_2 mit der Scheitelpunktform bestimmen.
- die beiden Schnittpunkte der beiden Parabeln durch Gleichsetzen bestimmen.
- die Gleichung von h bestimmen, indem man die Steigung von g verwendet und einen der beiden Schnittpunkte.

Ergebnisse in Kurzformat: $p_1: y=x^2+2x-4$ $S_1(-1|-5)$ $g: y=13x+8$ $p_2: y=-x^2+8$ $SP_1(2|4)$
$SP_2(-3|-1)$ Gerade h: entweder $h_1: y=13x-22$ oder $h_2: y=13x+38$

Tipps zu W2 b)

- R in p_1 einsetzen, um die komplette Gleichung von p_1 zu erhalten.
- Die Schnittpunkte P und Q erhält man durch Gleichsetzen von p_1 und p_2.
- Die Scheitelpunkte von p_1 und p_2 bestimmen und das Viereck S_1PS_2Q zeichnen.
- Die Steigungen von allen vier Seiten des Vierecks bestimmen.
  Anschließend prüfen, ob das Produkt der Steigungen von zwei nebeneinanderliegenden Seiten -1 ergibt [$m_1 \cdot m_2=-1$]. Falls das der Fall ist, ist in der betreffenden Ecke ein rechter Winkel.

Ergebnisse in Kurzformat: $p_1: y=\frac{1}{4}x^2-4$ P(2|-3) Q(-2|-3) $S_1(0|-4)$ $S_2(0|1)$
zwei rechte Winkel in P und in Q.

Tipps zu W3 a)

- g ist eine waagerechte Gerade [$\Rightarrow m=0$] durch den Schnittpunkt mit der y-Achse. Letzter ist einfach zu berechnen und erhält man schnell g.
- Die Schnittpunkte von f(x) mit g erhält man durch Gleichsetzen. Gleichung nach „x" auflösen und fertig sind die Schnittpunkte.
- Von der Tangente kennt man einen Punkt (S_2). Die Steigung erhält man indem man den x-Wert von S_2 in f'(X) einsetzt. Mit der PSF erhält man die Tangente.
- T liegt auf der Tangente, wenn die Punktprobe stimmt [T in die Tangente einsetzen].
- Nun den spitzen Winkel mit der Schnittwinkelformel bestimmen [die Steigung von h muss man vorher noch über die Punkte T und S_3 berechnen].
- Die Flächeninhalte von A_1 und A_2 kann man mit der langen Flächeninhaltsformel berechnen oder, falls man eine gute Skizze hat, mit $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$.
- Den prozentualen Anteil von A_1 an A_2 kann man über den Dreisatz bestimmen.

Ergebnisse in Kurzformat: $S_y(0|5)$ $g:y=5$ $S_1(-1{,}85|5)$ $S_2(0|5)$ $S_3(4{,}85|5)$
$t:y=-\frac{5}{3}x^2+5$ T liegt auf t, spitzer Winkel: $\gamma=51{,}13°$ $A_1=4{,}63$
$A_2=12{,}13$ prozentualer Anteil von A_1 an A_2 ist 38,17%.

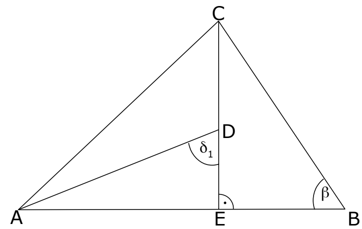
Tipps zu W4 a)

- Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn zwei Seiten gleich lang sind. Also zwei mal [oder drei mal] Entfernungsformel anwenden.
- Das Dreieck ist rechtwinklig, wenn der Pythagorassatz stimmt oder wenn die Steigung der Strecke AB der negative Kehrwert der Steigung von BC ist.
- Den vierten Punkt D bestimmt man am einfachsten mit der umgekehrten Mittelpunktsformel. [Alternative: Gerade AD mit der Steigung m_{BC} und dem Punkt A bestimmen, danach die Gerade CD mit der Steigung m_{AB} und dem Punkt C bestimmen. Zum Schluss die Geraden CD und AD schneiden].
- Der Umkreisradius ist die Hälfte der Streckenlänge AC.
- Egal wie sich der Punkt B bewegt: damit ABCD ein Drache ist, müssen BC und AB gleich lang bleiben. Also darf sich B nur auf der Geraden BD bewegen.

Ergebnisse in Kurzformat: $|AB|=|BC|=\sqrt{68}$. Rechter Winkel in B. D(-6|-5)
Umkreisradius=5,83 $i=g_{BD} \Rightarrow i: y=\frac{3}{5}x-\frac{7}{5}$

Ausführliche Lösung:

Lösung von P1



Man beginnt ja immer in Dreiecken, in denen man einen rechten Winkel plus zwei Angaben hat. Davon haben wir in diesem Fall gleich zwei: das Dreieck BCE und das Dreieck ADE.
Wenn wir im Dreieck BCE die Strecke $\overline{CE}$ berechnen und im Dreieck ADE die Strecke $\overline{DE}$, können wir beide Strecken voneinander abziehen und erhalten die gesuchte Strecke $\overline{CD}$.

ΔBCE:

Bestimmung von $\overline{CE}$:

$\sin(\beta) = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}} \quad | \cdot \overline{BC}$

$\overline{BC} \cdot \sin(\beta) = \overline{CE}$

$\overline{CE} = 9{,}0 \cdot \sin(55{,}0) \approx 7{,}37 \quad \Rightarrow \quad \overline{CE} = 7{,}37$ [cm]

ΔADE:

Bestimmung von $\overline{DE}$:

$\cos(\delta_1) = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \quad | \cdot \overline{AD}$

$\overline{AD} \cdot \cos(\delta_1) = \overline{DE}$

$\overline{DE} = 7{,}3 \cdot \cos(69{,}4) \approx 2{,}57 \quad \Rightarrow \quad \overline{DE} = 2{,}57$ [cm]

Bestimmung von $\overline{AE}$: [brauchen wir nur später für die Fläche]

$\overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AD}^2$

$\Rightarrow \overline{AE} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DE}^2} = \sqrt{7{,}3^2 - 2{,}57^2} \approx 6{,}83 \quad \Rightarrow \quad \overline{AE} = 6{,}83$ [cm]

Bestimmung von $\overline{CD}$:

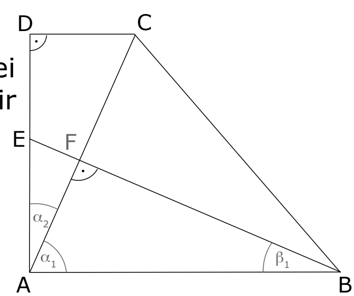
$\overline{CD} = \overline{CE} - \overline{DE} = 7{,}37 - 2{,}57 = 4{,}80 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\overline{CD} = 4{,}8}$ [cm]

Bestimmung des Flächeninhalts von ADC:

Wenn wir im ΔADC $\overline{CD}$ als Grundlinie betrachten, ist $\overline{AE}$ die Höhe [sie liegt außerhalb des Dreiecks].

$A_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{AE} = \frac{1}{2} \cdot 4{,}8 \cdot 6{,}83 \approx 16{,}39 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A_{\Delta ADC} = 16{,}39}$ [cm²]

Lösung von P2



Das einzige rechtwinklige Dreieck, in welchem wir zwei Angaben haben [plus rechter Winkel], ist ΔBEA. Wir beginnen also hier.

ΔBEA:

Bestimmung von $\overline{AB}$:

$\overline{AE}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AE}^2$

$\Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{\overline{BE}^2 - \overline{AE}^2} = \sqrt{8{,}4^2 - 3{,}1^2} \approx 7{,}81$

$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{BC} = 7{,}81$ [cm]

Bestimmung von β_1:

$\sin(\beta_1) = \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{3{,}1}{8{,}4} \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{3{,}1}{8{,}4}\right) \approx 21{,}66°$ (1) $\quad \Rightarrow \quad \beta_1 = 21{,}66°$

ΔABF:

Bestimmung von α_1:

$\alpha_1 = 180° - 90° - \beta_1 = 180° - 90° - 21{,}66° = 68{,}34° \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 68{,}34°$

1 Streng genommen heißt es in Mathe nicht „$\sin^{-1}$(...)“, sondern korrekt: „arcsin(...)“

Bestimmung von $\overline{AF}$:

$\sin(\beta_1) = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} \qquad | \cdot \overline{AB}$

$\overline{AF} = \overline{AB} \cdot \sin(\beta_1) = 7{,}81 \cdot \sin(21{,}66) \approx 2{,}88 \quad \Rightarrow \quad \overline{AF} = 2{,}88$ [cm]

Bestimmung von α_2: $\quad \alpha_2 = 90° - \alpha_1 = 90° - 68{,}34° \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 21{,}66°$

ΔACD:

Bestimmung von $\overline{AC}$:

$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AF} = 2 \cdot 2{,}88 = 5{,}76 \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = 5{,}76$ [cm]

Bestimmung von $\overline{AD}$:

$\cos(\alpha_2) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \qquad | \cdot \overline{AC}$

$\overline{AD} = \overline{AC} \cdot \cos(\alpha_2) = 5{,}76 \cdot \cos(21{,}66) \approx 5{,}35 \quad \Rightarrow \quad \overline{AD} = 5{,}35$ [cm]

Bestimmung von $\overline{CD}$:

$\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$

$\Rightarrow \quad \overline{CD} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{5{,}76^2 - 5{,}35^2} \approx 2{,}13 \quad \Rightarrow \quad \overline{CD} = 2{,}13$ [cm]

Bestimmung des Umfangs:

$U_{ACD} = \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{AD} = 5{,}76 + 2{,}13 + 5{,}35 = 13{,}24 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U = 13{,}24}$ [cm]

Lösung von P3

$\frac{x+3}{x} = \frac{9}{x^2 - 3x} - \frac{3}{x-3}$ unten kann man im zweiten Bruch „x“ ausklammern

$\frac{x+3}{x} = \frac{9}{x \cdot (x-3)} - \frac{3}{x-3}$

Um die Definitionsmenge zu bestimmen, setzt man jede einzelne „Klammer“, die in den Nennern auftaucht, Null.

erste „Klammer“: $x=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0$

zweite Klammer: $x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=3 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{D=\mathbb{R} \setminus \{0;3\}}$

Um die Lösungsmenge zu bestimmen, multipliziert man die Gleichung mit allen Klammern.

$\frac{x+3}{x} = \frac{9}{x \cdot (x-3)} - \frac{3}{x-3} \qquad | \cdot x \cdot (x-3)$

$\frac{x+3}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \cdot (x-3) = \frac{9}{\cancel{x \cdot (x-3)}} \cdot \cancel{x \cdot (x-3)} - \frac{3}{\cancel{x-3}} \cdot x \cdot \cancel{(x-3)}$ kürzen

$(x+3) \cdot (x-3) = 9 - 3 \cdot x$

$x^2 - 9 = 9 - 3x \qquad | +3x-9$

$x^2 + 3x - 18 = 0$

(p-q-Formel)

$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (-18)}$

$= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{72}{4}}$

$= -\frac{3}{2} \pm \frac{9}{2}$

(a-b-c-Formel)

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1}$

$= \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{2}$

$= \frac{-3 \pm 9}{2}$

$x_1 = \frac{6}{2} = 3 \qquad x_2 = -\frac{12}{2} = -6$

Sie sollten natürlich nur den Weg *entweder* über p-q-Formel *oder* über a-b-c-Formel rechnen.

Die Zahl „3“ taucht bereits in der Definitionsmenge auf.
Sie kann also nicht Teil der Lösungsmenge sein. $\quad 3 \notin \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L = \{-6\}}$

Lösung von P4

Um die Gleichung der Gerade g anzugeben, brauchen wir einen Punkt und eine Steigung. Die Steigung kennen wir [m=2]. Einen Punkt, den Scheitelpunkt, brauchen wir noch. Wir bestimmen einen Scheitelpunkt, indem wir die Ableitung der Parabel Null setzen [mit quadratischer Ergänzung ginge es auch].

$y=x^2-6x+10{,}5 \;\Rightarrow\; y'=2x-6$

$y'=0 \;\Rightarrow\; 2x-6=0 \;\Rightarrow\; 2x=6 \;\Rightarrow\; x=3$

Den y-Wert erhält man durch Einsetzen von x=3 in die Parabelgleichung.

$y = 3^2-6\cdot 3+10{,}5 = 1{,}5$. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten: $S(3|1{,}5)$

Nun kann man die Gleichung von g mit der PSF bestimmen.

[man könnte auch m, x und y in y=m·x+b einsetzen...]

$m_2 = \frac{y-y_S}{x-x_S}$ | m und S einsetzen

$2 = \frac{y-1{,}5}{x-3}$ | · (x−3)

$2\cdot(x-3) = y-1{,}5$ vereinfachen

$2x-6 = y-1{,}5$ | +1,5

$2x-4{,}5 = y$ ⇒ $\underline{g : y = 2x-4{,}5}$

Schnittpunkt Q der Parabel p und der Geraden g:

Einen Schnittpunkt erhält man, indem man Funktionen gleich setzt.

$p = g$

$x^2-6x+10{,}5 = 2x-4{,}5$ |−2x+4,5

$x^2-8x+15 = 0$

(p-q-Formel)

$x_{1,2}=4\pm\sqrt{4^2-15}$

$= 4\pm\sqrt{1}$

$= 4 \pm 1$

(a-b-c-Formel)

$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 1\cdot 15}}{2\cdot 1}$

$= \frac{8\pm\sqrt{4}}{2}$

$= \frac{8\pm 2}{2}$

$x_1=3 \quad x_2=5$

Sie sollten natürlich nur den Weg *entweder* über p-q-Formel *oder* über a-b-c-Formel rechnen.

$x_1=3$ ist uninteressant, da das wohl den Scheitelpunkt ergibt.

$x_2=5$ ergibt den gesuchten Punkt Q.

Den y-Wert erhält man durch Einsetzen von x=5 z.B. in g.

$y_Q = 2\cdot 5-4{,}5 = 5{,}5$ ⇒ **Q(5|5,5)**

Lösung von P5

Die Berechnung der Funktionswerte erfolgt natürlich mit dem Taschenrechner.

Wertetabelle:

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0	4,63	5,93	5	2,96	0,93	0	1,30	5,93

Die Extrempunkte berechnet man, indem man f'(x) = 0 setzt.

Wir leiten wir f(x) zweimal ab [f''(x) brauchen wir jetzt eigentlich noch nicht, aber später].

$f(x)=\frac{5}{27}x^3-\frac{5}{9}x^2-\frac{5}{3}x+5$

$f'(x)=\frac{5}{9}x^2-\frac{10}{9}x-\frac{5}{3}$

$f''(x)=\frac{10}{9}x-\frac{10}{9}$

Die erste Ableitung Null setzen.

$f'(x) = 0$

$$\frac{5}{9}x^2-\frac{10}{9}x-\frac{5}{3} = 0 \qquad |\cdot 9$$

$$5x^2-10x-15 = 0$$

(p-q-Formel)

$$5x^2-10x-15 = 0 \quad |:5$$

$$x^2-2x-3 = 0$$

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1^2-(-3)} =$$

$$= 1\pm 2$$

(a-b-c-Formel)

$$5x^2-10x-15 = 0$$

$$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 5\cdot(-15)}}{2\cdot 5} =$$

$$=\frac{10\pm\sqrt{400}}{10} =$$

$$=\frac{10\pm 20}{10}$$

$$x_1=3 \qquad x_2=-1$$

Sie sollten natürlich nur den Weg entweder über p-q-Formel oder über a-b-c-Formel rechnen.

Das sind die x-Werte der Extrema.

Die y-Werte liest man aus der Wertetabelle ab.

$EP_1(3|0)$

$EP_2(-1|5{,}93)$

Untersuchung der Punkte auf Hoch- oder Tiefpunkte.

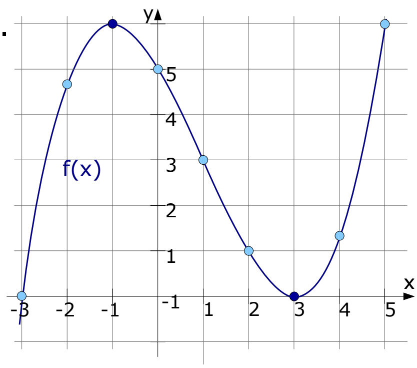
Dazu setzt man die x-Werte in f''(x) ein und überprüft das Vorzeichen.

x_1 in f''(x): $f''(3)=\frac{10}{9}\cdot 3-\frac{10}{9}\approx 2{,}2 > 0$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei **T(3 | 0)**

x_2 in f''(x): $f''(2)=\frac{10}{9}\cdot(-1)-\frac{10}{9}\approx -2{,}2 < 0$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei **H(-1|5,93)**

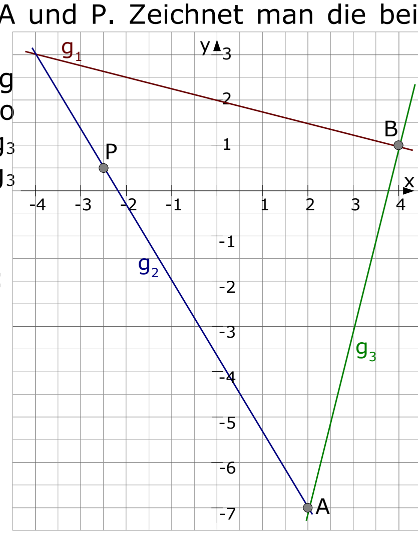


Lösung von P6

Einzeichnen von g_1: Man kennt die Geradengleichung. Den y-Achsenabschnitt und die Steigung einzeichnen oder eine Wertetabelle machen.

Einzeichnen von g_2: Von g_2 kennt man die Punkte A und P. Zeichnet man die beiden Punkte ein, kann man sie zu g_2 verbinden.

Einzeichnen von g_3: Die Gerade h hat die Steigung $m_h=4$. Die Gerade g_3 ist parallel zu h, hat also ebenfalls die Steigung $m_3=4$. Desweiteren geht g_3 durch den Punkt A. Damit kann man g_3 einzeichnen.



Bestimmung der Geraden g_2:

Man kennt zwei Punkte, also wendet man ZPF an:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{x-x_1} \qquad \text{A und P einsetzen}$$

$$\frac{0{,}5-(-7)}{-2{,}5-2} = \frac{y-(-7)}{x-2} \qquad \text{zusammenrechnen}$$

$$\frac{7{,}5}{-4{,}5} = \frac{y+7}{x-2} \qquad \text{links vereinfachen, danach } |\cdot(x-2)$$

$$-\frac{5}{3}\cdot(x-2) = y+7 \qquad \text{Klammern auflösen}$$

$$-\frac{5}{3}x+\frac{10}{3} = y+7 \qquad |-7$$

$$-\frac{5}{3}x-\frac{11}{3} = y \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{g_2: y=-\frac{5}{3}x-\frac{11}{3}}$$

Bestimmung der Geraden g_3:

Die Gerade g_3 ist parallel zu h, hat also die gleiche Steigung (m=4).
Wir haben von g_3 demnach einen Punkt und die Steigung.
Da verwenden wir die PSF.

$m_2 = \frac{y-y_A}{x-x_A}$ | $m_h=4$ und A(2|-7) einsetzen

$4 = \frac{y-(-7)}{x-2}$ | · (x–2)

$4\cdot(x-2)=y+7$ vereinfachen

$4x-8 = y+7$ | –7

$4x-15 = y$ ⇒ **g_3 : y = 4x–15**

Wie zeigt man, dass der Punkt C auf g_1 und auf g_2 liegt?

Man setzt die Koordinaten von C in g_1 und in g_2 ein.

C(-4|3) in $g_1: y=-\frac{1}{4}x+2$

$3 = -\frac{1}{4}\cdot(-4)+2$

$3 = 1 + 2$ ⇒ wahre Aussage ⇒ <u>C liegt auf g_1</u>

C(-4|3) in $g_2: y=-\frac{5}{3}x-\frac{11}{3}$

$3 = -\frac{5}{3}\cdot(-4)-\frac{11}{3}$

$3 = \frac{20}{3}-\frac{11}{3}$ ⇒ $3 = \frac{9}{3}$ ⇒ wahre Aussage ⇒ <u>C liegt auf g_2</u>

Den Schnittpunkt der zwei Geraden g_1 und g_3 bestimmt man durch Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen.

$g_1 = g_3$

$-\frac{1}{4}x+2 = 4x-15$ |·4

$-x+8 = 16x-60$ |+x+60

$68 = 17x$ ⇒ $x = \frac{68}{17} = 4$

Den y-Wert erhält man, wenn man x=4 in die Gleichung von g_1 oder g_3 einsetzt.

x=4 in g_1. $y = 4\cdot4-15 = 1$ ⇒ **B(4|1)**

Einen Schnittwinkel berechnet man mit der Schnittwinkelformel.

Dazu muss man noch nicht einmal wissen, wie der Sachverhalt aussieht, man muss nur die Steigungen beider Geraden kennen.
Es geht um die Gerade g_3, welche die Steigung $m_3=4$ hat und um die x-Achse, welche die Steigung m=0 hat.
Jetzt berechnet man den Schnittwinkel:

$$\Rightarrow \tan(\alpha) = \left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}\right| = \left|\frac{4-0}{1+4\cdot 0}\right| = \left|\frac{4}{1}\right| = 4 \Rightarrow \alpha=\tan^{-1}(4)=75{,}96°$$

Der spitze Winkel, zwischen g_3 und der x-Achse beträgt **α=75,96°**

Wie viel Prozent ist der Winkel kleiner als 90°?

Wir machen das mit dem Dreisatz. [Andere Methoden gehen natürlich auch.]
Die Frage bezieht sich auf die 90°, also entsprechen 90° den 100%

90° ……….100%
75,96° ……… x

Über Kreuz multiplizieren …

$$\Rightarrow 90°\cdot x = 75{,}96°\cdot 100\% \Rightarrow x = \frac{75{,}96°\cdot 100\,\%}{90°} = 84{,}4\%$$

Der Winkel beträgt 84,4%, also ist er 100%–84,4% = **15,6% kleiner.**

Lösung von P7

Der Zinssatz im dritten Jahr …

Da *insgesamt* 503,23€ Zinsen gutgeschrieben werden, können wir ausrechnen, wie hoch das Guthaben am Ende der drei Jahre ist.

$K_3 = 5.000,00 + 503,23 = 5.503,23$ €

Gleichzeitig kann man das Guthaben des dritten Jahres mit der Formel: $K_3 = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$ berechnen.

$$\Rightarrow \quad q_1 = 1+\frac{p_1}{100} = 1+\frac{2,5}{100} = 1,025 \qquad q_2 = 1+\frac{p_2}{100} = 1+\frac{3,25}{100} = 1,0325$$

Aus der Formel $K_3 = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$ ergibt sich:

$5503,23 = 5000 \cdot 1,025 \cdot 1,0325 \cdot q_3$ vereinfachen

$5503,23 = 5291,56 \cdot q_3$ |:5291,56

$1,040 = q_3$

$$q_3 = 1+\frac{p_3}{100} \quad \Rightarrow \quad 1,040 = 1+\frac{p_3}{100} \quad \Rightarrow \quad 0,040 = \frac{p_3}{100} \quad \Rightarrow \quad 4,0 = p_3$$

Der Zinssatz im dritten Jahr beträgt 4,0%.

Der gleichbleibende Zinssatz …

Bei einem gleichbleibende Zinssatz verwendet man die Formel $K_n = K_0 \cdot q^n$. In unserem Fall gilt wieder $K_n = 5.503,23$€ $K_0 = 5.000,00$€ und n=3. Das alles setzen wir ein.

$5503,23 = 5000 \cdot q^3$ |:5000

$1,10 = q^3$ | $\sqrt[3]{\ }$

$1,032 = q$

$$q = 1+\frac{p}{100} \quad \Rightarrow \quad 1,032 = 1+\frac{p}{100} \quad \Rightarrow \quad 0,032 = \frac{p}{100} \quad \Rightarrow \quad 3,2 = p$$

Ein gleichbleibender Zinssatz von 3,2% würde nach drei Jahren das gleiche Endkapital erbringen.

Lösung von P8

Falls Ihnen nicht klar ist, wie das mit der Mehrwertsteuer funktioniert: Jeder Händler stellt sich einen bestimmten Verkaufpreis für sein Produkt vor. Diesen Preis nennt man *Nettopreis*. Auf diesen Preis muss es einen bestimmten Prozentsatz draufschlagen, die *Mehrwertsteuer*, welche an den Staat abgeführt wird. Daraus ergibt sich der teurere *Bruttopreis*, zu welchem ein Produkt dann letztendlich vom Händler angeboten wird.Als Kunde sieht man eigentlich immer nur diesen Bruttopreis. In Deutschland haben wir derzeit einen Mehrwertsteuersatz von 19%. D.h. dass jedes Produkt, dass zum Verkauf angeboten wird, praktisch aus 119% besteht (die 100% des Nettopreises und die 19% Mehrwertsteuer). Wenn also z.B. ein Stuhl für 40€ verkauft wird, und Sie möchten wissen, wie hoch der Anteil der Mehrwertsteuer darin ist, dürfen Sie keinesfalls 19% von den 40€ rechnen, sondern setzen über´n Dreisatz die 40€ als 119% an und rechnen dann so irgendwie das Gefragt aus.

Sowohl die alten 16% als auch die neuen 19% beziehen sich auf den gleichen Nettopreis, also auf den gleiche Verkaufswert ohne Mehrwertsteuer. Daher kann man die 16% und 19% miteinander verrechnen. Die Preiserhöhung um 40,50€ entspricht also 3% des Nettopreises.

Man könnte nun einen Dreisatz aufstellen, in welchem 40,50€ 3% entspricht und x 100% entspricht. Dann würde man den Nettopreis für x erhalten.

Schlauer ist es, gleich an den Endpreis, also den Bruttopreis zu denken. Der setzt sich aus den 100% vom Nettopreis plus 19% von der Mehrwertsteuer zu erhalten. Der Endpreis (=Bruttopreis) entspricht daher 119%.

$$\begin{array}{ccc} 40{,}50€ & \ldots\ldots & 3\% \\ x & \ldots\ldots & 119\% \end{array}$$

Über Kreuz multiplizieren, um den neuen Bruttopreis zu erhalten …

$\Rightarrow$ $3\% \cdot x = 40{,}50€ \cdot 119\%$ $\Rightarrow$ $x = \frac{40{,}50€ \cdot 119\,\%}{3\%} = 1.606{,}50€$

Das Mountainbike kostet [einschließlich Mehrwertsteuer] 1.606,50€.

Guidos Behauptung …

Man kann schon ohne Rechnung behaupten, dass die Behauptung falsch ist, denn Guido behauptet, dass sich der *Endpreis* [also Bruttopreis] um 3% erhöht hat. Die 16% und 19% der Mehrwertsteuer beziehen sich jedoch immer auf den *Nettopreis*.

Falls einem langweilig ist geht auch folgende Rechnung:

Den Endpreis mit 19% haben wir vorher ausgerechnet: 1.606,50€.

Nun brauchen brauchen wir noch den „alten" Endwert mit 16% Mehrwertsteuer. Dieser Endwert besteht aus 100% [vom unveränderten Nettopreis] und den 16% [alte Mehrwertsteuer], also 116%.

Also den gleichen Dreisatz wie oben, nur mit 116%.

$$\begin{array}{ccc} 40{,}50€ & \ldots\ldots & 3\% \\ x & \ldots\ldots & 116\% \end{array}$$

Über Kreuz multiplizieren, um den alten Bruttopreis zu erhalten …

$\Rightarrow$ $3\% \cdot x = 40{,}50€ \cdot 116\%$ $\Rightarrow$ $x = \frac{40{,}50€ \cdot 116\,\%}{3\%} = 1.566{,}00€$

Wenn sich nun der Preis von 1.566,00€ auf 1.606,50€ erhöht hat, ist der alte Preis von 1.566,00€ nun die 100%. Wir schauen, wieviel Prozent die 1.606,50€ ausmachen.

$$\begin{array}{ccc} 1566{,}00€ & \ldots\ldots & 100\% \\ 1606{,}50€ & \ldots\ldots & x \end{array}$$

Über Kreuz multiplizieren …

$\Rightarrow$ $1566{,}00€ \cdot x = 1606{,}50€ \cdot 100\%$ $\Rightarrow$ $x = \frac{1606{,}50€ \cdot 100\,\%}{1566{,}00€} = 102{,}59\%$

Der neue Endpreis beträgt 102,59% vom alten, hat sich also um 2,59% erhöht. **Der Endpreis hat sich also *nicht* um 3% erhöht.**

Wahlteil

Lösung von W2 a)

Eine nach oben geöffnete Normalparabel hat die Gleichung: $p_1 : y = x^2+px+q$

Wir kennen zwei Punkte der Parabel, deren Koordinaten man in die Parabelgleichung einsetzt. Damit erhält man die Parameter „p" und „q".

A(-3|-1) in p_1: $-1 =(-3)^2+p\cdot(-3)+q \Rightarrow -1 = 9-3p+q$

B(1|-1) in p_1: $-1 = 1^2+p\cdot 1+q \Rightarrow -1 = 1+1p+q$

$0 = 8-2p \Rightarrow \ldots \Rightarrow p=2$

p=2 in eine der beiden Gleichungen einsetzen

$\Rightarrow -1=9-3\cdot 2+q \Rightarrow -1=3+q \Rightarrow -4=q \Rightarrow$ $\mathbf{p_1 : y=x^2+2x-4}$

Bestimmung von g:

Die Gerade g geht durch die Scheitelpunkte beider Parabeln.

Der Scheitelpunkt der zweiten Parabel ist angegeben: $S_2(0|8)$.

Den Scheitelpunkt der ersten Parabel bestimmt man über die Nullstelle der ersten Ableitung.

$p_1 : y=x^2+2x-4 \Rightarrow y'=2x+2 \quad y'=0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x=-1$

y-Wert berechnen: x=-1 in p_1. $y=(-1)^2+2\cdot(-1)-4=1-2-4=-5 \Rightarrow$ $\underline{S_1(-1|-5)}$

Nun kennen wir zwei Punkte, durch die die Gerade g verläuft.

$S_1(0|8)$ und $S_2(-1|-5)$ in die ZPF einsetzen.

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ S_1 und S_2 einsetzen

$\frac{-5-8}{-1-0} = \frac{y-8}{x-0}$ zusammenrechnen

$\frac{-13}{-1} = \frac{y-8}{x}$ links vereinfachen, danach $|\cdot x$

$13\cdot x = y-8$ $| +8$

$13x+8 = y \Rightarrow$ $\mathbf{g : y = 13x+8}$

Um h zu bestimmen, brauchen wir die Schnittpunkte von p_1 und p_2.

Und dafür brauchen wir wiederum die Gleichung von p_2.

Bestimmung der Parabelgleichung von p_2.

Von p_2 haben wir den Scheitelpunkt, also setzen wir mit der Scheitelform an: $y=a\cdot(x-x_S)^2+y_S$.

a=-1 [es ist eine nach unten geöffnete Normalparabel], wegen $S_2(0|8)$ gilt $x_S=0$ und $y_S=8$

$\Rightarrow p_2 : y = -1\cdot(x-0)^2+8 = -1\cdot(x)^2+8 = -x^2+8 \Rightarrow$ $\underline{p_2 : y=-x^2+8}$

Die Schnittpunkte von p_1 und p_2 bestimmen.

$p_1 = p_2$

$x^2+2x-4 = -x^2+8$ $|+x^2-8$

$2x^2+2x-12 = 0$

(p-q-Formel) (a-b-c-Formel)

$2x^2+2x-12=0$

$x^2+x-6 = 0$

$x_{1,2}=-0{,}5\pm\sqrt{0{,}5^2-(-6)}$

$= -0{,}5\pm\sqrt{6{,}25}$

$= -0{,}5\pm 2{,}5$

$2x^2+2x-12 = 0$

$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 2\cdot(-12)}}{2\cdot 2}$

$= \frac{-2\pm\sqrt{100}}{4} = \frac{-2\pm 10}{4}$

$x_1=2 \quad x_2=-3$

die y-Werte:

$y_1 = 2^2+2\cdot 2-4 = 4+4-4 = 4$ ⇒ $SP_1(\ 2|4\ )$

$y_2 = (-3)^2+2\cdot(-3)-4 = 9-6-4 = -1$ ⇒ $SP_2(-3|-1)$

Die Gerade h:

Nun können wir die Gleichung von h bestimmen. Die Steigung von h ist $m_h=13$ [die gleiche Steigung wie g]. Als Punkt von h dürfen wir uns einen beliebigen der Schnittpunkte aussuchen.
Wir rechnen hier beide Möglichkeiten, aber Sie müssen in der Prüfung *nur eine* der beiden Varianten rechnen.

PSF isch am Start.

$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$	$m=13$ $SP_1(2\|4)$ einsetzen	$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$	$m=13$ $SP_2(-3\|-1)$ einsetzen
$13 = \frac{y-4}{x-2}$	$\| \cdot (x-2)$	$13 = \frac{y-(-1)}{x-(-3)}$	vereinfachen
$13\cdot(x-2)=y-4$	vereinfachen	$13 = \frac{y+1}{x+3}$	$\| \cdot (x+3)$
$13x-26 = y-4$	$\| +4$	$13(x+3) = y+1$	$\| -1$
$13x-22 = y$		$13x+39-1 = y$	

entweder **$h_1 : y = 13x-22$** oder **$h_2 : y = 13x+38$**

Lösung von W2 b)

Die Parabel p_1 enthält den Punkt R(4|0). Den Punkt kann man natürlich in die Parabelgleichung einsetzen. Das tun wir.

R(4|0) in p_1: $0=\frac{1}{4}\cdot 4^2+c$ ⇒ $0=4+c$ ⇒ $c=-4$ ⇒ $p_1 : y=\frac{1}{4}\cdot x^2-4$

Die Schnittpunkte von p_1 und p_2 bestimmt man durch Gleichsetzen der beiden Parabeln. Die Schnittpunkte heißen P und Q.

$p_1 = p_2$

$\frac{1}{4}x^2-4 = -x^2+1$ $\quad | \cdot 4$

$x^2-16 = -4x^2+4$ $\quad | +4x^2+16$

$5x^2 = 20$ $\quad | : 5$

$x^2 = 4$ $\quad | \pm\sqrt{\ }$

$x = \pm 2$

Die y-Werte erhalten wir durch Einsetzen der x-Werte in eine der Parabelgleichungen.

x=2 in p_2: $y=-2^2+1=-4+1=-3$ ⇒ P(2|-3)

x=-2 in p_2: $y=-(-2)^2+1=-4+1=-3$ ⇒ Q(-2|-3)

Berechnung der Scheitelpunkte:

Beide Parabeln sind reinquadratisch, haben demnach die Form $y=ax^2+c$. Solche Parabeln haben ihren Scheitelpunkt immer auf der y-Achse [die x-Werte sind Null]. Die y-Werte erhält man durch Einsetzen von x=0 in die Parabelgleichungen.

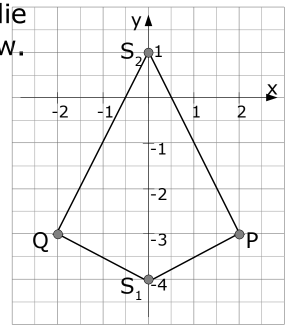
x=0 in p_1: $y_1=\frac{1}{4}\cdot 0^2-4=-4$ ⇒ $S_1(0|-4)$

x=0 in p_2: $y_2=-0^2+1 = 1$ ⇒ $S_2(0|1)$

Mia und ihr Viereck...:

Wenn das Viereck S_1PS_2Q zwei rechte Winkel(☺) haben soll, kann das laut Skizze nur in P oder Q sein. [Allerdings werden wir das berechnen müssen, nur so \`rumreden gilt nicht.]

Zwei Geraden stehen senkrecht aufeinander, wenn die eine Steigung der negative Kehrwert der anderen ist, bzw. wenn gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$.



Also bestimmen wir zuerst alle Steigungen.

$m_{S1P} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-3-(-4)}{2-0} = \frac{1}{2}$

$m_{PS2} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{1-(-3)}{0-2} = \frac{4}{-2} = -2$

$m_{S2Q} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-3-1}{-2-0} = \frac{-4}{-2} = 2$

$m_{QS1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-4-(-3)}{0-(-2)} = \frac{-1}{2}$

Rechter Winkel in S_2? $m_{PS2} \cdot m_{S2Q} = -2 \cdot 2 = -4$. Nö!

Rechter Winkel in Q? $m_{S2Q} \cdot m_{QS1} = 2 \cdot \frac{-1}{2} = -1$. Jawohl!

Rechter Winkel in S_1? $m_{S1P} \cdot m_{QS1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{1}{4}$. Nö

Rechter Winkel in P? $m_{S1P} \cdot m_{PS2} = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$. Jawohl!

Mia hat Recht. Das Viereck S_1PS_2Q hat tatsächlich zwei rechte Winkel!

(©) *Kleiner Witz am Rande: Was ist ein Neonazi in der Ecke?*

Antwort: Ein rechter Winkel

Lösung von W3 a)

Die Gerade g geht durch den Schnittpunkt von f(x) mit der y-Achse und ist parallel zur x-Achse.

Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat den x-Wert x=0 und den y-Wert $y = \frac{5}{27} \cdot 0^3 - \frac{5}{9} \cdot 0^2 - \frac{5}{3} \cdot 0 + 5 = 5$ $\Rightarrow$ $S_y(0|5)$

Eine Parallele zur x-Achse hat immer die Gleichung $y=c$.

Da g durch S_y geht, muss gelten: $y=5$ $\Rightarrow$ $\underline{g: y=5}$

Nun brauchen wir die Schnittpunkte von f(x) und g

$f(x) = g$

$\frac{5}{27}x^3 - \frac{5}{9}x^2 - \frac{5}{3}x + 5 = 5 \quad | -5$

$\frac{5}{27}x^3 - \frac{5}{9}x^2 - \frac{5}{3}x = 0 \quad | \cdot \frac{27}{5}$

$x^3 - 3x^2 - 9x = 0$ „x" ausklammern

$x \cdot (x^2 - 3x - 9) = 0$ Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$ $\quad$ $x^2 - 3x - 9 = 0$

$x^2 - 3x - 9 = 0$

(p-q-Formel) $\quad$ (a-b-c-Formel)

$x^2 - 3x - 9 = 0$

$x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 - (-9)} =$

$= 1{,}5 \pm \sqrt{11{,}25} =$

$= 1{,}5 \pm 3{,}35$

$x^2 - 3x - 9 = 0$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} =$

$= \frac{3 \pm \sqrt{45}}{2} =$

$= \frac{3 \pm 6{,}71}{2}$

$x_2 = 4{,}85 \quad x_3 = -1{,}85$

Da $x_1<x_2<x_3$ gelten soll, müssen wir die x-Werte umbenennen.

$x_1=-1{,}85 \quad x_2=0 \quad x_3=4{,}85$

Die y-Werte sind natürlich alle „5". [Einsetzen in g]. ⇒ **$S_1(-1{,}85|5)$**, **$S_2(0|5)$**, **$S_3(4{,}85|5)$**

Die Tangente an K_f in S_2:

Einen Punkt der Tangente kennen wir [$S_2(0|5)$], die Steigung erhalten wir über die erste Ableitung [siehe P5].

$$m_{Tan}=\frac{5}{9}\cdot 0^2-\frac{10}{9}\cdot 0-\frac{5}{3}=-\frac{5}{3}$$

Die Tangentengleichung bestimmen wir nun mit der PSF.

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1} \qquad m_{Tan} \text{ und } S_2 \text{ einsetzen}$$

$$-\frac{5}{3}=\frac{y-5}{x-0} \qquad |\cdot x$$

$$-\frac{5}{3}\cdot x=y-5 \qquad |+5$$

$$-\frac{5}{3}\cdot x+5=y \qquad \Rightarrow \qquad \underline{t: y=-\frac{5}{3}x+5}$$

Geht die Tangente durch den Tiefpunkt T?

Den Tiefpunkt kennen wir aus Aufgabe P5. T(3|0)!

T in die Tangente einsetzen: $0=-\frac{5}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}+5 \Rightarrow 0=-5+5 \Rightarrow 0=0$

Wahre Aussage. ⇒ **T liegt auf t**

Der spitze Winkel zwischen h und t.

Vorab zur Geraden h: wir brauchen von h nicht die komplette Geradengleichung, sondern nur die Steigung, denn in die Winkelberechnung fließt nur die Steigung einer Gerade ein.

$$m_h=\frac{y_T-y_{S3}}{x_T-x_{S3}}=\frac{0-5}{3-4{,}85}=\frac{-5}{-1{,}85}\approx 2{,}70$$

Nun können wir den Winkel zwischen h und t mit der Schnittwinkelformel bestimmen, denn wir kennen die Steigungen beider Geraden. $m_h=2{,}7$ und $m_t=-\frac{5}{3}\approx-1{,}67$

$$\tan(\gamma)=\left|\frac{m_h-m_t}{1+m_h\cdot m_t}\right|=\left|\frac{2{,}7-(-1{,}67)}{1+2{,}7\cdot(-1{,}67)}\right|=\left|\frac{4{,}37}{-3{,}51}\right|=1{,}25 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\gamma=}\tan^{-1}(1{,}245)\approx\mathbf{51{,}34°}$$

Der Flächeninhalt von A_1:

Wir kennen alle drei Eckpunkte des Dreiecks TS_1S_2. Daher können wir gleich mit der langen Flächeninhaltsformel starten.

[Mit einer guten Skizze hätte man auch sehen können, dass man mit der Dreiecksformel $A=½\cdot g\cdot h$ ansetzen kann. $g=0-(-1{,}85)=1{,}85$ $h=5$ ⇒ $A_1=½\cdot1{,}85\cdot5=4{,}63$. Diese Methode wäre recht einfach.]

$T(3|0)$, $S_1(-1{,}85|5)$, $S_2(0|5)$

$$\Rightarrow A_1=|\,½\cdot[x_1\cdot(y_2-y_3)+x_2\cdot(y_3-y_1)+x_3\cdot(y_1-y_2)]\,|=$$
$$=|\,½\cdot[3\cdot(5-5)+(-1{,}85)\cdot(5-0)+0\cdot(0-5)]\,|=$$
$$=|\,½\cdot[3\cdot0-1{,}85\cdot5-0\cdot5]\,|=|\,½\cdot[-9{,}25]\,|\approx 4{,}63 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A_1=4{,}63}\ \textbf{[FE]}$$

Der Flächeninhalt von A_2:

Vom Dreieck TS_3S_2 kennen wir ebenfalls die Koordinaten aller drei Eckpunkte, setzen also mit der gleichen Formel an.

[Auch hier könnte man mit der Skizze erkennen, dass $A=½\cdot g\cdot h$ gut funktioniert. $g=4{,}85-0=4{,}85$ $h=5$ ⇒ $A_1=½\cdot4{,}85\cdot5=12{,}13$.]

$T(3|0)$, $S_3(4{,}85|5)$, $S_2(0|5)$

$$\Rightarrow A_2=|\,½\cdot[x_1\cdot(y_2-y_3)+x_2\cdot(y_3-y_1)+x_3\cdot(y_1-y_2)]\,|=$$
$$=|\,½\cdot[3\cdot(5-5)+4{,}85\cdot(5-0)+0\cdot(0-5)]\,|=$$

$= |\ ½\cdot[3\cdot0+4{,}85\cdot5-0\cdot5]\ | = |\ ½\cdot[24{,}25]\ | \approx 12{,}13 \quad \Rightarrow \quad \underline{A_2=12{,}13\ [FE]}$

Wieviel Prozent von A_2 beträgt A_1?

Das berechnen wir mit dem Dreisatz. Die Frage bezieht sich *auf* den Flächeninhalt von A_2, also sind das die 100%.

A_2 ……… 100% bzw. 12,13 ……… 100%

A_1 ……… x 4,63 ……… x

Über Kreuz multiplizieren: $12{,}13\cdot x = 4{,}63\cdot 100\%$

$12{,}13\cdot x = 463\%$ |:12,13

$x = 38{,}17\%$

Der Flächeninhalt des Dreiecks A_1 beträgt **38,17%** des Flächeninhalts von A_2.

Lösung von W4 a)

Wie zeigt man, dass ein Dreieck gleichschenklig ist? Von den drei Seiten müssen zwei gleich lang sein. A(2|-7) B(4|1) C(-4|3)

$|AB| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(4-2)^2+(1-(-7))^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$

$|AC| = \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} = \sqrt{(-4-2)^2+(3-(-7))^2} = \sqrt{36+100} = \sqrt{136}$

$|BC| = \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2} = \sqrt{(-4-4)^2+(3-1)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$

Welch ein Glück! |AB|=|BC| ⇒ **ABC ist gleichschenklig**.

Wie zeigt man, dass ein Dreieck rechtwinklig ist? Z.B. ist das der Fall, wenn der Satz von Pythagoras erfüllt ist.

Die längste Seite ist offensichtlich |AC|. Also sollte gelten:

$|AB|^2+|BC|^2 = |AC|^2$

$\sqrt{68}^2+\sqrt{68}^2=\sqrt{136}^2$

⇒ 68 + 68 = 136 ⇒ wahre Aussage. **Das Dreieck ABC ist rechtwinklig**.

Den Punkt D so bestimmen, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.

Lösungsweg 1 [hässlich]:

Wir bestimmen die Gleichung der Gerade, die parallel zu BC ist und durch A geht [über PSF]. Danach bestimmen wir die Gleichung der Gerade, die parallel zu AB ist und durch C geht. Beide Geraden schneidet man und erhält D.

Lösungsweg 2 [geschickt] :

Wir bestimmen den Mittelpunkt von AC und spiegeln danach B daran:

Mittelpunkt von A und C:

$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{2+(-4)}{2}=-1 \qquad y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{-7+3}{2}=-2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{M(-1|-2)}$

Um den Punkt D zu bestimmen, verwenden wir die Idee, dass M auch der Mittelpunkt von B und D ist [umgekehrte Mittelpunktsformel]. Es gilt wieder die gleiche Formel wie eben, nur löst man diese nach denn Koordinaten von D auf.

$x_M = \frac{x_B+x_D}{2} \Rightarrow 2\cdot x_M = x_B+x_D \Rightarrow x_D = 2\cdot x_M-x_B = 2\cdot(-1)-4 = -6$

$x_M = \frac{x_B+x_D}{2} \Rightarrow 2\cdot y_M = y_B+y_D \Rightarrow y_D = 2\cdot y_M-y_B = 2\cdot(-2)-1 = -5$

⇒ $\underline{\underline{D(-6|-5)}}$

Der Umkreis*mittelpunkt* ist der Punkt M, den wir eben schon berechnet haben.

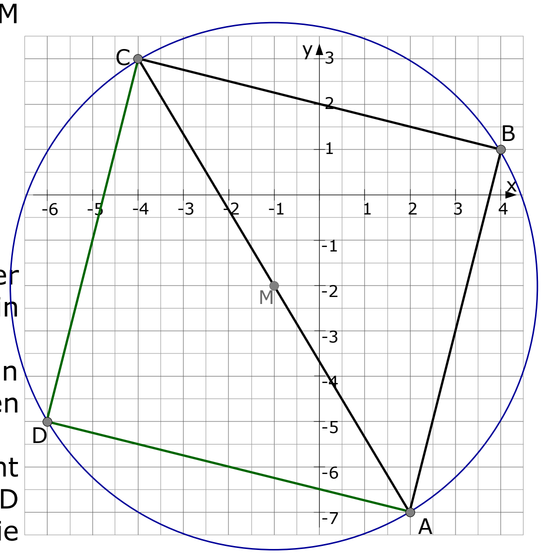
Der Umkreis*radius* ist der Abstand von M zu einem der vier Eckpunkte.

$r = |MA| = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} =$

$= \sqrt{(-1-2)^2 + (-2-(-7))^2} =$

$= \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \approx 5{,}83$

Der Umkreisradius ist 5,83.



Die Gerade i bestimmen:

Der Punkt B soll sich auf irgendeiner Gerade i so bewegen, dass ABCD ein Drachen ist.

Nun gut... ein Drachen ist ein Viereck, in welchem zwei nebeneinander liegenden Seiten gleich lang sind.

Da sich die Punkte A, C und D nicht ändern, bleiben die Seiten AD und CD gleich lang. Damit müssen auch die Seiten BC und AB gleich lang bleiben, egal wie sich B bewegt. Und deswegen muss sich B entlang der Diagonalen BD bewegen.

Damit wissen wir, dass die Gerade i die Gerade BD sein muss!

Bestimmung der Gerade i mit Hilfe der Punkt B und D über ZPF.

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ B und D einsetzen

$\frac{-5-1}{-6-4} = \frac{y-1}{x-4}$ zusammenrechnen

$\frac{-6}{-10} = \frac{y-1}{x-4}$ links vereinfachen, danach $|\cdot(x-4)$

$\frac{3}{5}\cdot(x-4) = y-1$ vereinfachen

$\frac{3}{5}x - \frac{12}{5} = y-1$ $| +1$

$\frac{3}{5}x - \frac{7}{5} = y$ $\Rightarrow$ $\mathbf{i : y = \frac{3}{5}x - \frac{7}{5}}$