Realschulabschluss

an

Waldorfschulen

Prüfung 2017

Prüfung 2017

Pflichtbereich

Aufgabe P 1:

(aus Waldorf-RAP)

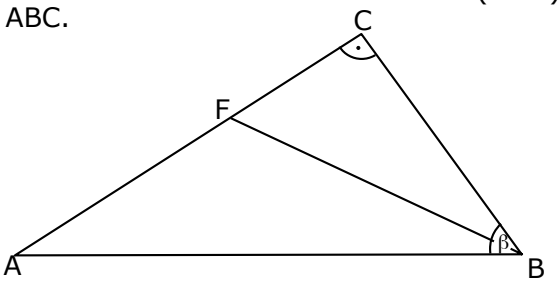
(4 P)

Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ABC.

Es gilt:
$\overline{BC}$ = 5,8 cm
$\overline{BF}$ = 6,6 cm

BF halbiert den Winkel β

Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks ABF.



Aufgabe P 2:

(aus Waldorf-RAP)

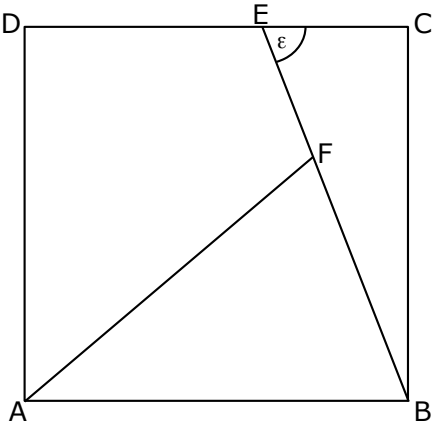
(4 P)

Im Quadrat ABCD liegen
das rechtwinklige Dreieck BCE und
das gleichschenklige Dreieck ABF.

Es gilt:

$\overline{BC}$ = 11,8 cm
ε = 72,0°
$\overline{AB}$ = $\overline{AF}$

Berechnen Sie die Länge von $\overline{EF}$.



Aufgabe P 3:

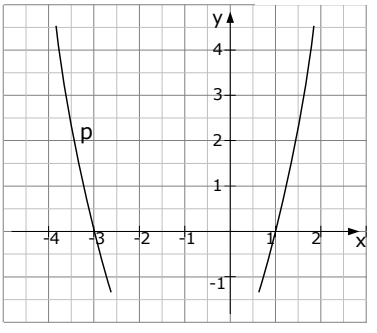
(aus Waldorf-RAP)

(3,5 P)

Das Schaubild zeigt den Ausschnitt einer verschobenen Normalparabel p.

Die Gerade g mit der Gleichung y=3x+b geht durch den Scheitelpunkt S der Parabel p.

Berechnen Sie die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes Q von p und g.



Aufgabe P 4:

(aus Waldorf-RAP)

(3,5 P)

Lösen Sie die Gleichung:

$(2x-1)(2x+1) - x(x-2) = (x-5)^2 + 6$

Aufgabe P 5:

(aus Waldorf-RAP)

(7,5 P)

Eine Funktion f hat die Gleichung:

$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 1$

Ihr Schaubild sei K_f.

Berechnen Sie die Funktionswerte für alle ganzzahligen Werte von x im Bereich $-2 \leqslant x \leqslant 6$.

Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte von K_f.

Untersuchen Sie diese Extrempunkte auf Hoch- und Tiefpunkte.

Tragen Sie die berechneten Werte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein und zeichnen Sie K_f (1 LE = 1 cm).

Aufgabe P 6:

(aus Waldorf-RAP)

(7,5 P)

Die Gerade g_1 geht durch den Punkt C(-6|1) und ist parallel zur 1.Winkelhalbierenden.

Die Gerade g_2 hat die Gleichung $y = \frac{1}{3}x + 3$.

Die Gerade g_3 geht durch B(-1|6) und Q(2|4,5).

Zeichnen Sie die Geraden in ein rechtwinkliges Koordinatensystem (1LE=1cm) ein.

Berechnen Sie die Gleichungen der Geraden g_1 und g_3.

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes A von g_2 und g_3.

Zeigen Sie, dass C auch auf g_2 liegt.

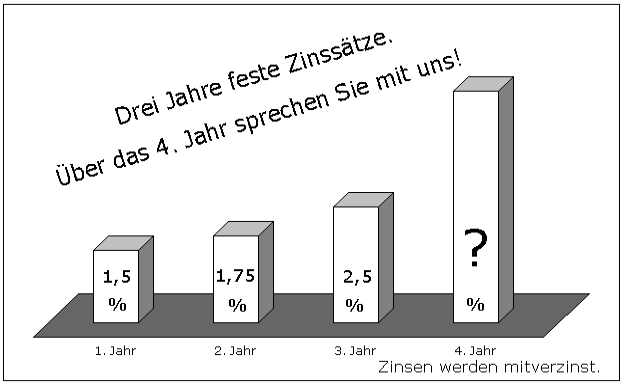
Um wie viel Prozent ist die Strecke $\overline{BC}$ länger als die Strecke $\overline{AB}$?

Aufgabe P 7:

(aus staatlicher-RAP 2011)

(3,5 P)

Eine Bank wirbt mit nebenstehender Grafik.



Herr Lenz möchte einen Betrag von 5.000,00 € anlegen. Nach Ablauf von 4 Jahren soll sich der Betrag auf 5.500,00 € erhöhen.

Welchen Zinssatz müsste die Bank für das vierte Jahr anbieten?

Bei welchem jährlich gleichbleibenden Zinssatz würde er nach vier Jahren das gleiche Endkapital erzielen?

Aufgabe P 8:

(aus staatlicher-RAP 2008)

(3 P)

Gabi legt bei ihrer Bank 2.500,00 € zu folgenden Zinssätzen auf drei Jahre an:

1. Jahr: 3,50 %
2. Jahr: 3,75 %
3. Jahr 4,25 %

Zinsen werden mitverzinst.

Das angesparte Geld lässt sie nach Ablauf der drei Jahre ein weiteres Jahr bei der Bank.

Für dieses vierte Jahr erhält sie 132,93 € Zinsen.

Wie hoch ist der Zinssatz im vierten Jahr?

Aufgabe P 9:

(aus staatlicher-RAP 2002)

Barbara zahlt jeweils zu Jahresanfang einen Betrag von 1.200,00 € auf einen Ratensparvertrag ein. Der Zinssatz beträgt 4,5%. Zinsen werden mitverzinst.

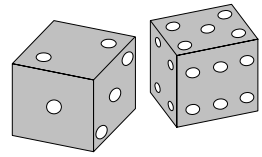
Berechnen Sie das Guthaben nach Ablauf von 3 Jahren.

Anschließend lässt sie dieses Guthaben ohne weitere Einzahlung bei gleichem Zinssatz so lange bei der Bank, bis es auf 4.000,00 € angewachsen ist.

Nach wie viel Tagen ist dies der Fall?

Aufgabe P10: (Pflichtteil-Aufgabe 2017 der staatlichen RS [mit TR])

(5,5 P)



Max und Nele spielen ein Würfelspiel.
Zwei Würfel werden gleichzeitig geworfen.
Die beiden Augenzahlen werden addiert (Augensumme).
Gewonnen hat der Spieler mit der größeren Augensumme.
Überprüfen Sie die Aussage:
„Die Wahrscheinlichkeit für Augensumme 6 ist größer als die Wahrscheinlichkeit für Augensumme 9."
Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung oder Argumentation.
Max hat eine 5 und eine 3 geworfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Nele mit dem nächsten Wurf das Spiel gewinnt?

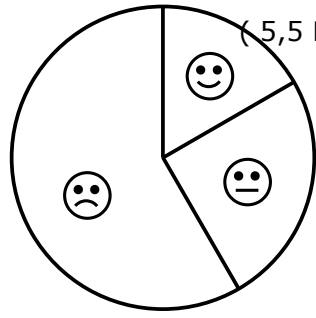
(Kurzergebnisse auf Seite 9, Lösungen auf Seite 18)

Wahlbereich

Aufgabe W 1a:

(5,5 P)

Bei einer Wohltätigkeitsveranstaltung wird ein Glücksrad eingesetzt.
Die Mittelpunktswinkel betragen 60°, 90° und 210°
Das Glücksrad wird zweimal gedreht.



Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man höchstens einmal das Symbol ☺ ?

Das Glücksrad wird für ein Glückspiel verwendet.
Berechnen Sie den Erwartungswert unter Berücksichtigung des nebenstehenden Gewinnplans.
Der Gewinnplan soll so verändert werden, dass das Spiel fair wird.
Wie hoch muss der Gewinn für das Ereignis „zweimal ☺" sein, wenn alles andere unverändert bleibt?

Ereignisse	Gewinn
zweimal ☺	4,00 €
zweimal 😐	2,00 €
sonstige	kein Gewinn
Einsatz pro Spiel: 0,50 €	

(Kurzergebnisse auf Seite 10, Lösungen auf Seite 19)

Aufgabe W 2:

a) Drei Gleichungen – drei Graphen (5 P)

(A) $y = ax^2 - 1$

(B) $y = x^2 - 6x + 5$

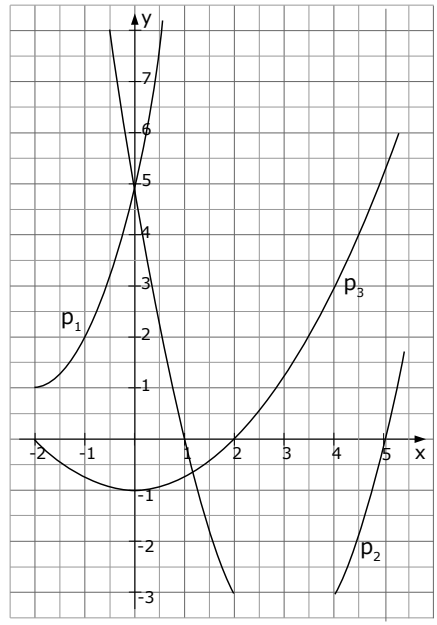
(C) $y = x^2 + 4x + q$

Welcher Graph gehört zu welcher Funktionsgleichung?
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Vervollständigen Sie die Funktionsgleichungen von (A) und (C).

Die Gerade g geht durch die Scheitelpunkte von p_2 und p_3.
Berechnen Sie die Funktionsgleichung von g.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Scheitelpunkt von p_1 ebenfalls auf g liegt.



b) Die Parabel p_1 mit $y = \frac{1}{4}x^2 - 4$ und die nach oben geöffnete Normalparabel p_2 mit dem Scheitel $S_2(1{,}5|-3{,}25)$ haben einen gemeinsamen Punkt R. (5 P)
Die Gerade h geht durch den Ursprung (0|0) und den Punkt R.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden h.

Die Schnittpunkte der Parabel p_1 mit der x-Achse und der Punkt R bilden ein Dreieck.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Bastian behauptet: „Die Gerade h halbiert den Flächeninhalt des Dreiecks." Hat Bastian Recht?
Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung oder Argumentation.

Aufgabe W 3: *(aus Waldorf-RAP)*

a) Gegeben ist die Funktionsgleichung von Aufgabe P5 des Pflichtbereichs:

$$f(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{4}x^2+1$$ (6,5 P)

Die Gerade g ist parallel zur x-Achse und geht durch den Tiefpunkt T von K_f. Sie schneidet K_f in P.

Berechnen Sie die Koordinaten von P.

Die Tangente t_1 berührt K_f in P.

Die Gerade h ist parallel zur x-Achse und geht durch den Hochpunkt von K_f.

Die Tangente t_1 schneidet h in Q.

Die Gerade u ist die Parallele zur y-Achse durch den Wendepunkt W von K_f.

Die Geraden g, t_1, h und u schließen ein Viereck ein.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks.

Die Tangente t_2 an K_f ist parallel zu t_1.

Berechnen Sie die Koordinaten des Berührpunktes B dieser Tangente.

Aufgabe W 4: *(aus Waldorf-RAP)*

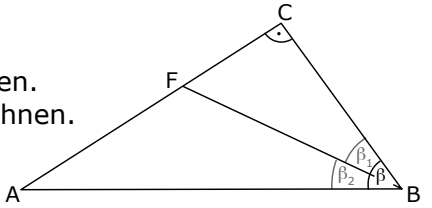
Die Punkte A(3|4), B(-1|6) und C(-6|1) von Aufgabe P6 des Pflichtbereichs sind gegeben.

(7 P)

a) Berechnen Sie die Länge der Höhe durch den Punkt B des Dreiecks ABC.
Berechnen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Umkreises des Dreiecks ABC.
Zeigen Sie, dass das Dreieck ABD mit Punkt D(2|-3) den gleichen Umkreis-mittelpunkt hat.

Tipps und Ergebnisse:

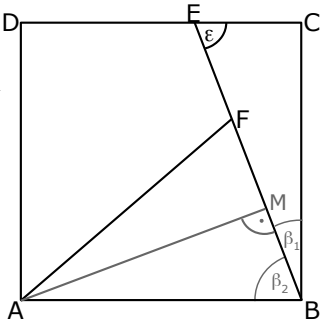
Tipps zu P1:



-Im Dreieck BCF β_1 und $\overline{CF}$ [über $\overline{BF}$ und $\overline{BC}$] berechnen.
-Im Dreieck ABC β, $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ [über β und $\overline{BC}$] berechnen.
-$\overline{AF}$ [über $\overline{AC}$ und $\overline{CF}$] berechnen.
-Den Umfang des Dreiecks ADC bestimmen.

Ergebnisse in Kurzformat: β_1=28,48° $\overline{CF}$=3,15
β=56,96° $\overline{AB}$=10,64 $\overline{AC}$=8,92 $\overline{AF}$=5,77 $U_{\Delta ABF}$=23,01

Tipps zu P2:



-Im Dreieck BCE β_1 und β_2 berechnen, danach [über β_1 und $\overline{BC}$] $\overline{BE}$ berechnen.
-Im Dreieck ABM $\overline{BM}$ berechnen [über β_2 und $\overline{AB}$].
-Jetzt $\overline{BF}$ und $\overline{EF}$ berechnen.

Ergebnisse in Kurzformat: $\overline{AB}$=$\overline{AF}$=11,8 β_1=18° β_2=72°
$\overline{BE}$=12,41 $\overline{BM}$=3,65 $\overline{BF}$=7,30 $\overline{EF}$=5,11

Tipps zu P3:

-Die Nullstellen für die LinearFaktorForm verwenden und damit die Parabelgleichung aufstellen.
-Den Scheitelpunkt S der Parabel bestimmen [Ableitung Null setzen].
-Punktprobe von S mit der Geraden machen, um „b" zu bestimmen.
-Schnittpunkte von der Parabel mit der Gerade bestimmen.

Ergebnisse in Kurzformat: p:$y=x^2+2x-3$ S(-1|-4) g:$y=3x-1$ Q(2|5)

Tipps zu P4:

-Alle Klammern auflösen, danach zusammenfassen
-Alles auf eine Seite bringen, quadratischen Gleichung lösen.

Ergebnisse in Kurzformat: entstehende Gleichung: $2x^2+12x-32=0$ x_1=2 x_2=-8

Tipps zu P5:

-Die x-Werte der Extrema erhält man, indem man die erste Ableitung Null setzt.
Die y-Werte erhält man durch Einsetzen von x in f(x).
-Ob´s ein Hoch- oder Tiefpunkt ist, erhält man, indem man die x-Werte in die zweite Ableitung einsetzt. [Ist das Ergebnis negativ, so ist´s ein Hochpunkt und umgekehrt].

Ergebnisse in Kurzformat:

Wertetabelle:	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
	5	1,88	1	1,53	3	4,38	5	4,13	1

HP(4 | 5)
TP(0 | 1)

Tipps zu P6:

-Die Gerade g_1 über PSF berechnen [mit Punkt C und der Steigung m=1 der 1.Winkelhalb.].
-Die Gerade g_3 über ZPF berechnen [die Punkte B und Q verwenden].
-Den Schnittpunkt A erhält man durch Gleichsetzen von g_2 und g_3 ($g_2=g_3$).
-C liegt auf g_2, wenn die Punktprobe stimmt [x- und y-Wert von C in g_2 einsetzen].
-Die Längen der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ erhält man über die Abstandformel [=Entfernungsformel]. Mit Dreisatz [oder Ähnlichem] den proz. Unterschied berechnen.

Ergebnisse in Kurzformat: $g_1: y=x+7$ $g_3: y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$, A(3|4),
$\overline{AB}=4{,}47$ $\overline{BC}=7{,}07$ $\overline{BC}$ ist 58,17% länger als $\overline{AB}$.

Tipps zu P7:

-Die erste Frage lässt sich mit der Formel $K_n=K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4$ beantworten.
q_1, q_2, q_3 ausrechnen, zusammen mit K_0 und K_n einsetzen und nach q_4 auflösen.
-Die zweite Frage lässt sich mit der Formel $K_n=K_0 \cdot q^n$ beantworten.
K_0 und K_n einsetzen und nach q auflösen.

Ergebnisse in Kurzformat: Im vierten Jahr müsste die Bank 3,9% Zinsen anbieten.
Die Bank müsste einen gleichbleibenden Zinssatz von 2,4% anbieten.

Tipps zu P8:

Man kann sofort K_3 berechnen. Damit und mit den Zinsen des vierten Jahres, berechnet über den Dreisatz den Zinssatz des vierten Jahres.

Ergebnisse in Kurzformat: K_3=2.798,62€ Gabi bekommt 4,75% Zinsen.

Tipps zu P9:

-Zuerst die Formel für Ratensparen verwenden. $K_3=R \cdot (q+q^2+q^3)$
-Danach die Formel für unterjährige Verzinsung: $Z = \frac{K \cdot t \cdot p}{360 \cdot 100}$

Ergebnisse in Kurzformat: Kapital nach drei Jahren: K_3 = 3.933,83 €
Anzahl der Tage bis 4.000,-€: 138 Tage

Tipps zu Aufg. P10 (von Seite 5)

- Bei Augensummen von Würfeln muss man eigentlich immer alle möglichen Kombinationen notieren. Das ist zwar umständlich, aber sicherer.
- Für Augensumme 6 gibt es 5 Kombinationsmöglichkeiten.
- Für Augensumme 9 gibt es 4 Kombinationsmöglichkeiten.
- Nele gewinnt, wenn sie mindestens 9 als Augensumme erzielt. Dafür gibt es 10 Kombinationsmöglichkeiten. [Schön brav alles durchdenken und aufschreiben!!]

Ergebnisse in Kurzformat: Augensumme 6: P(A.S.=6) ≈ 13,9%
Augensumme 9: P(A.S.=9) ≈ 11,1%
Nele wirft eine Augensumme von mindesten 9 mit:
P(A.S. mind. 9) ≈ 27,8% ← Mit 27,8% gewinnt sie daher auch. I

Tipps zu Aufg. W 1a (von Seite 5)

- Der Erwartungswert des Gewinns wird berechnet, indem man die Werte des Gewinns mit ihren Wahrscheinlichkeit multipliziert. Damit erhält man durchschnittliche Auszahlungen. Davon zieht man den Einsatz von 0,50 € ab.
- Wird das Spiel abgeändert, berechnet man wiederum einen Erwartungswert [ähnlich wie in der letzten Rechnung].

Ergebnisse in Kurzformat: Aus Sicht der Wohltätigkeitsveranstaltung ist der Erwartungswert im ersten Fall ist 0,26€ (der Wohltätigkeitsveranstalter gewinnt). Damit das Spiel fair wird, muss der Gewinn für „☺☺" auf 13,50€ abgeändert werden.

Tipps zu W2 a)

- Welche Gleichung gehört zu welchem Schaubild … irgendwelche geschickte Punkte des Schaubilds in die Parabelgleichung einsetzen.
- Vervollständigung der Funktionsgleichung … wieder irgendwelche geschickte Punkte des Schaubilds in die Parabelgleichung einsetzen und „a" und „q" erhalten.
- Mit den Scheitelpunkten der beiden Parabeln bestimmt man die Gleichung der Gerade g [über PSF].
- Dass der Scheitelpunkt von p_1 auf g liegt, zeigt man mit der Punktprobe.

Ergebnisse in Kurzformat: (A) gehört zu p_3, (B) zu p_2 und (C) zu p_1. $p_1: y_C = x^2+4x+5$
$p_3: y_A = 0{,}25x^2-1$ Scheitelpunkte: $S_1(-2|1)$ $S_2(3|-4)$ $S_3(0|-1)$ $g: y=-x-1$

Tipps zu W2 b)

- p_2 erhält man mit dem Scheitelpunkt S_2 mithilfe der Scheitelpunktsform.
- Den Schnittpunkt R erhält man durch Gleichsetzen von p_1 und p_2.
- Die Funktionsgleichung von h erhält man über die ZPF mit den Punkten O und R.
- Den Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2R erhält man über die lange Flächeninhaltsformel oder über $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$.
  (Vorher muss man die Nullstellen von von p_1 bestimmen).
- Bastians Behauptung... Da h durch den Ursprung geht, geht es um die beiden Teildreieck ON_1R und ON_2R. Den Flächeninhalt von einem der Teildreiecke berechnen [genau gleich wie bei N_1N_2R] und dann schauen ob die Hälfte des Flächeninhaltes rauskommt oder eben nicht.

Ergebnisse in Kurzformat: $p_2: y=x^2-3x-1$ $R(2|-3)$ $h: y=-\frac{3}{2}x$, Fläche von N_1N_2R ist 12.
Bastian hat recht, h halbiert die Dreiecksfläche.

Tipps zu W3 a)

- g ist eine waagerechte Gerade [⇒m=0] durch den Tiefpunkt. Den Tiefpunkt haben wir seit P5. Der y-Wert davon ist für g relevant.
- Die Schnittpunkte von f(x) mit g erhält man durch Gleichsetzen. Gleichung nach „x" auflösen und fertig sind die Schnittpunkte. Einer davon ist der Tiefpunkt, der andere ist der gesuchte Punkt P.
- Die Tangente t_1 erhält man mit der PSF. Ein Punkt ist P, die Steigung erhält man über f'(x).
- Die Gerade h ist ebenfalls parallel zur x-Achse, hat also die Form y=c. Hochpunkt aus P5 entnehmen und den y-Wert verwenden.
- Den Schnittpunkt Q durch Gleichsetzen von t_1 und h bestimmen.
- u ist parallel zur y-Achse, hat also die Form x=c. Den Wendepunkt von f(x)

berechnen und den x-Wert verwenden.
- Die Geraden g, t_1, h und u skizzieren. Den Flächeninhalt eines Trapezes berechnet man mit $A=½\cdot(a+c)\cdot h$. Die Strecken a, c und h kann man ablesen.
- t_2 und t_1 sind parallel, haben also beide die gleiche Steigung [m=-4,5 kam vorher raus]. Man setzt also f'(x)=-4,5 und erhält beide Berührpunkte. Einer ist B, der andere ist gesucht.

Ergebnisse in Kurzformat: g:y=1 P(6|1) t_1:y=-4,5x+28 h:y=5 Q(5,11|5) W(2|3) u:x=2 A_{Trapez}=14,22 B(-2|5)

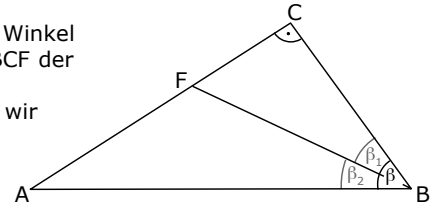
Tipps zu W4 a)
- Um eine Höhe zu berechnen, braucht man Abstand von einem Punkt zur Geraden. Dazu wiederum braucht man den Lotfußpunkt. Also Gerade aufstellen, die orthogonal auf AC steht und durch B geht. Danach PSF anwenden.
  Der Schnittpunkt dieser Orthogonalen mit der Gerade AC ist der Lotfußpunkt.
  Nun den Abstand vom Lotfußpunkt zu B bestimmen.
- Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Also braucht man zwei Mittelsenkrechten, die man schneidet. [Eine Mittelsenkrechte erhält man mithilfe der PSF. Ihre Steigung ist der negative Kehrwert der Dreiecksseite, der Punkt ist der Mittelpunkt dieser Seite.]
- Der Umkreisradius ist der Abstand von einem der Eckpunkte zum Mittelpunkt des Umkreises [den wir eben errechnet haben].
- Das Dreieck ABD hat den gleichen Umkreismittelpunkt, wenn der Abstand von A, von B und von D zum Umkreismittelpunkt genau so groß wie der eben errechnete Umkreisradius ist. [Es gibt natürlich noch andere Möglichkeiten.]

Ergebnisse in Kurzformat: Gleichung der Höhe auf B: h_B:y=-3x+3, Lotfußpunkt L(0|3),
Mittelsenkrechte auf AC: y=-3x−2, Mittelsenkrechte auf AB: y=2x+3,
Mittelsenkrechte auf BC: y=-x, Umkreismittelpunkt: M(-1|1), Umkreisradius: r=5

Ausführliche Lösung:

Lösung von P1

Man beginnt immer in Dreiecken, in denen man einen rechten Winkel plus zwei Angaben hat. In dieser Aufgabe ist das im Dreieck BCF der Fall.
Wenn wir im Dreieck BCF den Winkel β_1 berechnen, haben wir damit auch den Winkel β_2 und β, da BF den Winkel β halbiert.



ΔBCE:

Bestimmung von β_1:

$\cos(\beta_1) = \frac{\overline{BC}}{\overline{BF}} = \frac{5,8}{6,6} \approx 0,879$

$\Rightarrow \beta_1 = \cos^{-1}(0,879) \approx 28,48°$ $\Rightarrow$ $\beta_1 = \beta_2 = 28,48°$

Bestimmung von $\overline{CF}$: [brauchen wir später] $\Rightarrow$ $\beta = 56,96°$

$\overline{BC}^2+\overline{CF}^2 = \overline{BF}^2$

$\Rightarrow \overline{CF} = \sqrt{\overline{BF}^2-\overline{BC}^2} = \sqrt{6,6^2-5,8^2} \approx 3,15$ $\Rightarrow$ $\overline{CF} = 3,15$ [cm]

ΔABC:

Bestimmung von $\overline{AB}$:

$\cos(\beta) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ $\quad | \cdot \overline{AB}$

$\overline{AB}\cdot\cos(\beta) = \overline{BC}$ $\quad | : \cos(\beta)$

$\overline{AB} = \frac{\overline{BC}}{\cos(\beta)} = \frac{5,8}{\cos(56,96)} \approx 10,64$ $\Rightarrow$ $\overline{AB} = 10,64$ [cm]

Bestimmung von $\overline{AC}$:

$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$

$\Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2} = \sqrt{10,64^2-5,8^2} \approx 8,92$ $\Rightarrow$ $\overline{AC} = 8,92$ [cm]

Bestimmung von $\overline{AF}$:

$\overline{AF} = \overline{AC}-\overline{CF} = 8,92-3,15 = 5,77$ $\Rightarrow$ $\overline{AF} = 5,77$ [cm]

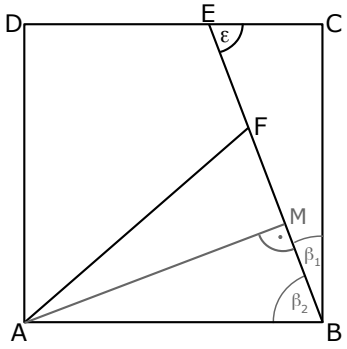
Bestimmung des Umfangs von ABF:

$U_{\Delta ABF} = \overline{AF}+\overline{BF}+\overline{AB} = 5,77+6,6+10,64 = 23,01$ $\Rightarrow$ $\mathbf{U_{\Delta ABF}=23,01}$ [cm]

Lösung von P2

Da ABCD ein Quadrat ist, gilt $\overline{AB}=\overline{BC}$. $\Rightarrow$ $\overline{AB}=\overline{AF}=\overline{BC}=11,8$ [cm]

Das einzige rechtwinklige Dreieck, in welchem wir zwei Angaben [plus rechter Winkel] haben, ist ΔBCE. Wir starten also in diesem Dreieck.



ΔBEA:

Bestimmung von β_1:

$\beta_1 = 90°-\varepsilon = 90°-72,0° = 18°$

Bestimmung von $\overline{BE}$:

$\cos(\beta_1) = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$ $\quad | \cdot \overline{BE}$ $\quad | : \cos(\beta_1)$

$\overline{BE} = \frac{\overline{BC}}{\cos(\beta_1)} = \frac{11,8}{\cos(18,0)} \approx 12,41$

Bestimmung von β_2:

$\beta_2 = 90°-\beta_1 = 90°-18,0° = 72,0°$

$\Rightarrow$ $\beta_1 = 18,0°$

$\Rightarrow$ $\overline{BE} = 12,41$ [cm]

$\Rightarrow$ $\beta_2 = 72,0°$

ΔABM:

Das Dreieck ABF ist gleichschenklig [$\overline{AB}=\overline{BC}$], daher teilt die Höhe $\overline{AM}$ dieses Dreieck in zwei gleiche Teildreiecke. Daher entstehen bei M rechte Winkel und es gilt: $\overline{BM}=\overline{MF}=½\cdot\overline{BF}$.

Bestimmung von $\overline{BM}$:

$\cos(\beta_2) = \frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} \quad | \cdot \overline{AB}$

$\overline{BM} = \overline{AB}\cdot\cos(\beta_2) = 11{,}8\cdot\cos(72{,}0) \approx 3{,}65 \quad \Rightarrow \quad \overline{BM} = 3{,}65$ [cm]

Bestimmung von $\overline{BF}$:

$\overline{BF} = 2\cdot\overline{BM} = 2\cdot 3{,}65 = 7{,}30 \quad \Rightarrow \quad \overline{BF} = 7{,}30$ [cm]

Bestimmung von $\overline{EF}$:

$\overline{EF} = \overline{BE}-\overline{BF} = 12{,}41-7{,}30 = 5{,}11 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\overline{EF} = 5{,}11}$ **[cm]**

Lösung von P3

Von der gezeichneten Parabel kann man die Nullstellen ablesen.
Daher eignet sich die Linearfaktorform gut, um die Parabel aufzustellen.

Die Linearfaktorform lautet: $y=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$
Hierbei sind x_1 und x_2 die Nullstellen, also $x_1=-3$ und $x_2=1$
und $a=1$, da es sich um eine nach oben geöffnete Normalparabel handelt.
Es gilt: $p: y = 1\cdot(x-(-3))\cdot(x-1)$
Vereinfachen: $y = (x+3)\cdot(x-1) = x^2+3x-1x-3 = x^2+2x-3 \quad \Rightarrow \quad p: y=x^2+2x-3$

Nun brauchen wir noch den Scheitelpunkt S.

Ein Scheitelpunkt einer Parabel ist ein Tiefpunkt, welchen man berechnen kann, indem man die Ableitung Null setzt.

$y=x^2+2x-3 \Rightarrow y'=2x+2$

$y'=0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x=-1$

Den y-Wert des Scheitels erhält man durch einsetzen von x=-1 in y.

$y=(-1)^2+2\cdot(-1)-3=-4 \quad \Rightarrow \quad S(-1|-4)$

Jetzt kann man die Gleichung der Geraden g vollständig bestimmen.

Man setzt dazu S in g ein (Punktprobe).

S in g: $-4 = 3\cdot(-1)+b \Rightarrow -4=-3+b \Rightarrow b=-1 \quad \Rightarrow \quad g: y=3x-1$

Endlich kommen wir zur Bestimmung des Schnittpunktes Q.

Q ist der Schnittpunkt von p mit g, also setzen wir beide gleich.

$p = g$

$x^2+2x-3 = 3x-1 \quad | -3x+1$

$x^2-x-2 = 0$

(p-q-Formel) (a-b-c-Formel)

$x^2-x-2 = 0$

$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-(-2)}$

$= \frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2}{1}}$

$= \frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}$

$x_1=\frac{4}{2}=2 \quad x_2=-\frac{2}{2}=-1$

$x^2-x-2 = 0$

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}$

$= \frac{1\pm\sqrt{9}}{2}$

$= \frac{1\pm3}{2}$

$x_1=\frac{4}{2}=2 \quad x_2=-\frac{2}{2}=-1$

Sie sollten natürlich nur den Weg *entweder* über p-q-Formel *oder* über a-b-c-Formel rechnen.

Wir haben die x-Werte beider Schnittpunkte erhalten.
Die y-Werte erhält man, indem man x in g [oder in g] einsetzt.

$x_1=2$ in g: $y=3x-1 \Rightarrow y_1=3\cdot 2-1=5 \Rightarrow P_1(2|5)$

$x_2=-1$ in g: $y=3x-1 \Rightarrow y_2=3\cdot(-1)-1=-4 \Rightarrow P_2(-1|-4)$

P_2 ist uninteressant, denn das war vorher der Scheitelpunkt.
Der gesuchte Punkt Q ist also P_1. $\Rightarrow$ **Q(2|5)**

Lösung von P4

$(2x-1)(2x+1) - x(x-2) = (x-5)^2 + 6$ Klammern auflösen

$4x^2+2x-2x-1 - x^2+2x = x^2-10x+25+6$ zusammenfassen

$3x^2+2x-1 = x^2-10x+31$ $|-x^2+10x-31$

$2x^2+12x-32 = 0$

(p-q-Formel) (a-b-c-Formel)

$2x^2+12x-32=0 \quad |:2$

$x^2+6x-16=0$

$x_{1,2}=-3\pm\sqrt{3^2-(-16)}$

$= -3\pm\sqrt{25}$

$= -3 \pm 5$

$x_1=2 \quad x_2=-8$

$x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot 2\cdot(-32)}}{2\cdot 2}$

$= \frac{-12\pm\sqrt{144+256}}{4}$

$= \frac{-12\pm\sqrt{400}}{4}$

$= \frac{-12\pm 20}{4}$

$x_1=\frac{8}{4}=2 \quad x_2=-\frac{32}{4}=-8$

$\Rightarrow$ **L={-8;2}**

Lösung von P5

Die Berechnung der Funktionswerte erfolgt natürlich mit dem Taschenrechner.
Wertetabelle:

-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
5	1,88	1	1,53	3	4,38	5	4,13	1

Die Extrempunkte berechnet man, indem man f'(x) = 0 setzt.
Wir leiten wir f(x) zweimal ab [f''(x) brauchen wir jetzt eigentlich noch nicht, aber später].

$f(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{4}x^2+1$

$f'(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x$

$f''(x)=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$

Die erste Ableitung Null setzen.

$f'(x) = 0$

$-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x = 0 \quad |\cdot 8$

$-3x^2+12x = 0$ x ausklammern

$x\cdot(-3x+12) = 0$

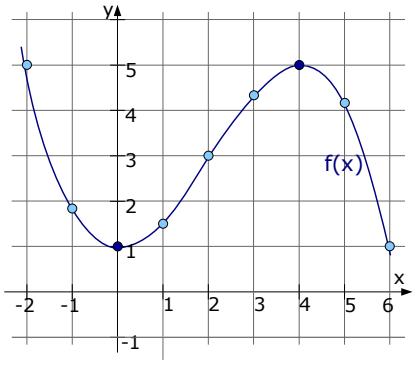
$x_1=0 \qquad -3x+12=0 \Rightarrow -3x=-12 \Rightarrow x_2=4$

Das sind die x-Werte der Extrema. → **$EP_1(0|1)$**
Die y-Werte liest man aus der Wertetabelle ab. → **$EP_2(4|5)$**

Untersuchung der Punkte auf Hoch- oder Tiefpunkte.
Dazu setzt man die x-Werte in f''(x) ein und überprüft das Vorzeichen.

x_1 in f''(x): $f''(0)=-\frac{3}{4}\cdot 0+\frac{3}{2}=\frac{3}{2} > 0$
⇒ Tiefpunkt bei **T(0 | 1)**

x_2 in f''(x): $f''(4)=-\frac{3}{4}\cdot 4+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2} < 0$
⇒ Hochpunkt bei **H(4 | 5)**

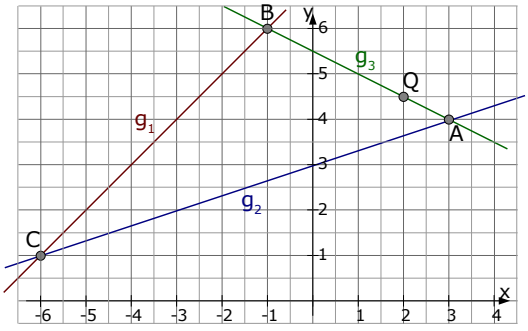


Lösung von P6

Einzeichnen von g_1: Die erste Winkelhalbierende hat die Steigung m=1. Die Gerade g_1 ist parallel dazu, hat also ebenfalls die Steigung $m_1=1$. Desweiteren geht g_1 durch den Punkt C. Damit kann man g_1 einzeichnen.

Einzeichnen von g_2: Man kennt die Geradengleichung. Den y-Achsenabschnitt und die Steigung einzeichnen oder eine Wertetabelle machen.

Einzeichnen von g_3: Von g_3 kennt man die beiden Punkte B und Q. Zeichnet man die beiden Punkte ein, kann man sie zu g_3 verbinden.



Bestimmung der Geraden g_1:
Die Gerade g_1 ist parallel zur ersten Winkelhalbierenden [die erste Winkelhalbierende hat die Gleichung y=x], hat also die gleiche Steigung (m=1).
Wir haben von g_1 demnach einen Punkt und die Steigung.
Da verwenden wir die PSF.

$m_1 = \frac{y-y_C}{x-x_C}$ | m_1=1 und C(-6|1) einsetzen

$1 = \frac{y-1}{x-(-6)}$ vereinfachen

$1 = \frac{y-1}{x+6}$ | · (x+6)

$1\cdot(x+6)=y-1$ vereinfachen

$x+6 = y-1$ | +1

$x+7 = y$ ⇒ **$g_1 : y = x+7$**

Bestimmung der Geraden g_3:

Man kennt zwei Punkte, also wendet man ZPF an:

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ B und Q einsetzen

$\frac{4,5-6}{2-(-1)} = \frac{y-6}{x-(-1)}$ zusammenrechnen

$\frac{-1,5}{3} = \frac{y-6}{x+1}$ links vereinfachen, danach $|\cdot(x+1)$

$-\frac{1}{2}\cdot(x+1) = y-6$ Klammern auflösen

$-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} = y-6$ $|+6$

$-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2} = y$ $\Rightarrow$ $\mathbf{g_3: y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}}$

Den Schnittpunkt der zwei Geraden g_2 und g_3 bestimmt man durch Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen.

$g_2 = g_3$

$\frac{1}{3}x+3 = -\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$ $|\cdot 6$

$2x+18 = -3x+33$ $|+3x-18$

$5x = 15$ $\Rightarrow$ $x = 3$

Den y-Wert erhält man, wenn man x=3 in die Gleichung von g_2 oder g_3 einsetzt.

x=3 in g_2: $y=\frac{1}{3}\cdot 3+3 = 4$ $\Rightarrow$ **A(3|4)**

Wie zeigt man, dass der Punkt C auf g_2 liegt?

Man setzt die Koordinaten von C in g_2 ein.

C(-6|1) in $y=\frac{1}{3}x+3$

$1 = \frac{1}{3}\cdot(-6)+3$

$1 = -2 + 3$ $\Rightarrow$ wahre Aussage $\Rightarrow$ C liegt auf g_2

Wie viel Prozent ist $\overline{BC}$ länger als $\overline{AB}$?

Die Streckenlänge $\overline{BC}$ bestimmt man mit der Entfernungsformel:

$d(B,C) = \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2} = \sqrt{(-6-(-1))^2+(1-6)^2} =$

$= \sqrt{(-5)^2+5^2} = \sqrt{50} \approx 7,07$

Die Streckenlänge $\overline{AB}$ bestimmt man nach dem gleichen Prinzip:

$d(A,B) = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(-1-3)^2+(6-4)^2} =$

$= \sqrt{(-4)^2+2^2} = \sqrt{20} \approx 4,47$

Wie viel Prozent ist die Strecke $\overline{BC}$ länger als die Strecke $\overline{AB}$?

Wir machen das mit dem Dreisatz. [Andere Methoden gehen natürlich auch.]

Die Frage bezieht sich auf die Strecke $\overline{AB}$, also entspricht die Länge von $\overline{AB}$ den 100%.

4,47 ..... 100%

7,07 x

Über Kreuz multiplizieren …

$\Rightarrow 4,47\cdot x = 7,07\cdot 100 \Rightarrow x = \frac{7,07\cdot 100\,\%}{4,47} = 158,17\%$

Das sind 58,17% mehr als $\overline{AB}$ [mit 100%]

$\Rightarrow$ **Die Strecke $\overline{BC}$ ist 58,17% länger als die Strecke $\overline{AB}$.**

Lösung von P7

Der Zinssatz für das vierte Jahr …

Es handelt sich natürlich um eine Zinseszins-Rechnung, denn offensichtlich erhält Herr Lenz in jedem Jahr Zinsen.

Da es vier Jahre gibt, aber der Zinssatz nicht in jedem Jahr gleich ist, verwenden wir die Formel: $K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4$.

K_n ist das Endkapital, hier $K_n = K_4 = 5.500{,}00$

K_0 ist das Anfangskapital, hier $K_0 = 5.000{,}00$

$p_1 = 1{,}5\% \Rightarrow q_1 = 1 + \frac{1{,}5}{100} = 1{,}015$

$p_2 = 1{,}75\% \Rightarrow q_2 = 1 + \frac{1{,}75}{100} = 1{,}0175$

$p_3 = 2{,}5\% \Rightarrow q_3 = 1 + \frac{2{,}5}{100} = 1{,}025$

Das setzen wir alles in die Formel ein und erhalten:

$5500{,}00 = 5000{,}00 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}0175 \cdot 1{,}025 \cdot q_4$ zusammenrechnen

$5500{,}00 = 5292{,}91$ | : 5292,91

$1{,}039 = q_4$

Aus q_4 berechnen wir p_4, den Zinssatz des vierten Jahres:

$q_4 = 1 + \frac{p_4}{100} \Rightarrow 1{,}039 = 1 + \frac{p_4}{100} \Rightarrow 0{,}039 = \frac{p_4}{100} \Rightarrow p_4 = 3{,}9\%$

Im vierten Jahr müsste die Bank 3,9% Zinsen anbieten.

Welcher gleichbleibenden Zinssatz …

Man braucht die Formel für gleichbleibenden Zinssatz: $K_n = K_0 \cdot q^n$.

$K_0 = 5000{,}00$ $K_n = 5500{,}00$ und $n = 4$ sind unverändert.

Erst lösen wir nach q auf, daraus bestimmen wir p.

$\Rightarrow 5500{,}00 = 5000{,}00 \cdot q^4$ |:5000,00

$1{,}1 = q^4$ | $\sqrt[4]{\ }$

$1{,}024 = q$

$\Rightarrow q = 1 + \frac{p}{100} \Rightarrow 1{,}024 = 1 + \frac{p}{100} \Rightarrow 0{,}024 = \frac{p}{100} \Rightarrow p = 2{,}4\%$

Die Bank müsste einen gleichbleibenden Zinssatz von 2,4% anbieten.

Lösung von P8

Wir kennen das Anfangskapital von Gabi und wir wissen, was in den ersten drei Jahren [zinstechnisch] passiert. Wir können also, ohne was wirklich Intelligentes zu denken, einfach ausrechnen, welchen Geldbetrag Gabi nach den drei Jahren hat.

Wir verwenden die Formel: $K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$ mit den Werten:

$K_0 = 2.500{,}-€$ $q_1 = 1 + \frac{3{,}50}{100} = 1{,}035$, $q_2 = 1 + \frac{3{,}75}{100} = 1{,}0375$, $q_3 = 1 + \frac{4{,}25}{100} = 1{,}0425$

$\Rightarrow K_3 = 2500{,}00 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}0375 \cdot 1{,}0425 = 2798{,}62$ €

Gabi hat am Ende des dritten Jahres [=Anfang des vierten] 2.798,62 €.

Jetzt denken wir um: wenn Gabi Anfang des vierten Jahres 2.798,62€ hat und für dieses vierte Jahr 132,93€ Zinsen bekommt, können wir ausrechnen, welchem Prozentsatz das entspricht.

$2798{,}62$ 100%

$132{,}93$ x

Über Kreuz multiplizieren …

$\Rightarrow 132{,}93 \cdot 100\% = 2798{,}62 \cdot x \Rightarrow x = \frac{132{,}93 \cdot 100\ \%}{2798{,}62} \approx 4{,}75\%$

$\Rightarrow$ **Gabi bekommt für das vierte Jahr 4,75% Zinsen**.

Lösung von P9

Die Aufgabe besteht praktisch aus zwei Teilen.

Der erste Teil ist Ratensparen, der zweite Teil eine unterjährige Verzinsung.

Zum ersten Teil:

Barbara zahlt jeweils zu Jahresanfang 1.200,-€ ein. Da *jedes* Jahr ein Geldbetrag [die Rate] eingezahlt wird, handelt es sich um Ratensparen.

Laut Formelsammlung gilt die Formel: $K_n=R\cdot(q+q^2+q^3+\ldots)$

K_n ist das Endkapital, hier ist das gesucht.

R ist die jährliche Rate, hier R=1.200,00 €

$q = 1+\frac{p}{100} = 1+\frac{4,5}{100} = 1,045$

Es geht um drei Jahre.

$\Rightarrow K_3=1.200,00\cdot(1,045+1,045^2+1,045^3)=3.933,83$ € $\Rightarrow$ **K_3=3.933,83 €**

Im zweite Teil ist gefragt, wieviel Tage das Geld auf der Bank liegen soll.

Das klingt, als ob es um weniger als ein Jahr geht. Daher geht es um eine unterjährige Verzinsung.

In der Formelsammlung finden Sie die Formel $Z = \frac{K\cdot t\cdot p}{360\cdot 100}$

K ist das Startkapital. Hier 3.933,83€

[Der Start der unterjährigen Verzinsung, nicht der Start der Aufgabe!]

t ist die Anzahl der Tage. Ist hier gesucht.

p ist der Prozentsatz. Hier: p=4,5%

Z sind die Zinsen. Das Kapital steigt von 3.933,83€ auf 4.000,00€.

Die Zinsen sollen also 4.000,00–3.933,83=66,17€ betragen.

$Z = \frac{K\cdot t\cdot p}{360\cdot 100} \Rightarrow 66,17 = \frac{3933,83\cdot t\cdot 4,5}{360\cdot 100}$ |·360·100

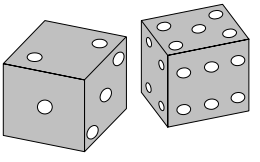
$66,17\cdot 360\cdot 100=3933,83\cdot t\cdot 4,5$ vereinfachen

$2382120 = 17252,23\cdot t$ |:17252,23

$138,08 = t$

Nach ca. 138 Tagen [plus 3 Jahren] **hat Barbara 4.000,00€.**

Lösung von Aufg. P10 (von Seite 5)



Vorab:
Aufgaben zur Augensumme von Würfeln sind eigentlich immer arbeitsaufwändig. Meistens nicht schwer, aber mit viel Schreibarbeit verbunden.

Jede Zahl auf einem Würfel hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.

Wirft man zwei Würfel, ist die Wahrscheinlichkeit für *jede* Zahlenkombination $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$. Egal, ob man (2;1) [also erst eine 2, dann eine 1] würfelt, oder (4;5) oder (2;2), die Wahrscheinlichkeit ist immer $\frac{1}{36}$.

Wir brauchen natürlich zuerst die Wahrscheinlichkeiten für die Augensumme 6 und für die Augensumme 9. Dazu überlegen wir uns *alle* Wurfkombinationen, die diese Augensumme (=A.S.) liefern:

Augensumme 6 geht mit: (1;5), (2;4), (3;3), (4;2), (5;1).

Das sind 5 Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist:

P(A.S. ist 6) = $5 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{36} \approx 0{,}139 \triangleq 13{,}9\%$

Augensumme 9 geht mit: (3;6), (4;5), (5;4), (6;3).

Das sind 4 Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist:

P(A.S. ist 9) = $4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{4}{36} \approx 0{,}111 \triangleq 11{,}1\%$

Die Aussage stimmt. Die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 6 ist größer, als die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 9.

Nele gewinnt, wenn Sie eine Augensumme von 9 oder höher würfelt, da Max als Augensumme 8 hat. Wir notieren alle Wurfkombinationen, die das erfüllen. [Sie sollten irgendeine Systematik anwenden. Ich beginne mit der kleinsten Möglichkeit für den ersten Wurf und arbeite dann alle möglichen für den zweiten durch.]

Augensumme von mindestens 9 geht mit:

(3;6), (4;5), (4;6), (5;4), (5;5), (5;6), (6;3), (6;4), (6;5), (6;6)

Das sind 10 Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist:

P(A.S. ist mind. 9) = $10 \cdot \frac{1}{36} = \frac{10}{36} \approx 0{,}278 \triangleq 27{,}8\%$

Nele gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von 27,8% im nächsten Wurf.

Wahlteil

Lösung von Aufg. WS.**W 1a** (von Seite 5)

Das Zeichen ☺ hat den kleinsten Mittelpunktswinkel, hat also den Mittelpunktswinkel von 60°. Die Wahrscheinlichkeit bei *einer* Drehung das Zeichen „☺" zu erhalten, liegt bei P(☺)= $\frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$

Die Wahrscheinlichkeit für *einmal* „😐", liegt bei P(😐)= $\frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}$

Die Wahrscheinlichkeit für *einmal* „☹", liegt bei P(☹)= $\frac{210°}{360°} = \frac{7}{12}$

Die Wahrscheinlichkeit höchstens einmal „☺" zu erhalten, berechnet man am besten über das Gegenereignis.

Das Gegenereignis von „höchstens einmal" ist: „zweimal".

⇒ P(höchstens einmal ☺) = 1–P(zweimal ☺) = $1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{36}$

Den Erwartungswert berechnet man, indem man alle Möglichkeiten mit den Wahrscheinlichkeiten multipliziert.

Wir ignorieren zuerst den Einsatz und berechnen vorerst nur den Erwartungswert für das Geld, das bei Gewinn *ausgezahlt* wird.

Ereignisse	**Gewinn**
zweimal ☺	4,00 €
zweimal 😐	2,00 €
sonstige	kein Gewinn
Einsatz pro Spiel:	0,50 €

Drehungen	☺ ☺	😐 😐	sonstige
Gewinn	4,00 €	2,00 €	0€
Wahrsch.	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$	egal

Der Erwartungswert beträgt:

$E(x) = 4{,}00 \cdot \frac{1}{36} + 2{,}00 \cdot \frac{1}{16} + 0 \cdot \text{egal} \approx 0{,}24€$

Im Durchschnitt werden also 0,24€ an den Spieler ausgezahlt.
Da der Einsatz 0,50€ beträgt, verliert der Spieler im Durchschnitt 0,24€–0,50€=-0,26€. Die Wohltätigkeitsveranstaltung gewinnt mit jedem Spiel 0,26€ ⇒ **E(x)=0,26€**

Das Spiel soll nun fair werden. Das bedeutet, dass an den Spieler genau so viel ausbezahlt werden muss, wie sein Einsatz ist.
An den Spieler müssen durchschnittlich 0,50€ ausbezahlt werden.
Im Gewinnplan ändert sich die Auszahlung für das Ereignis „☺☺".
Diesen abgeänderten Gewinn muss man berechnen. Wir bezeichnen ihn z.B. mit XY. Der neue Gewinnplan sieht nun aus, wie in der rechten Tabelle.

Ereignisse	Gewinn
zweimal ☺	XY
zweimal 😐	2,00 €
sonstige	kein Gewinn
Einsatz pro Spiel: 0,50 €	

Der neue Erwartungswert beträgt:

$E_{neu}(x) = XY \cdot \frac{1}{36} + 2{,}00 \cdot \frac{1}{16} + 0 \cdot \text{egal}$

Da $E_{neu}(X)=0{,}50$ sein soll, gilt:

$0{,}50 = XY \cdot \frac{1}{36} + 2{,}00 \cdot \frac{1}{16} \quad | - 2{,}00 \cdot \frac{1}{16}$

$0{,}375 = XY \cdot \frac{1}{36} \quad | \cdot 36$

$13{,}5 = XY$

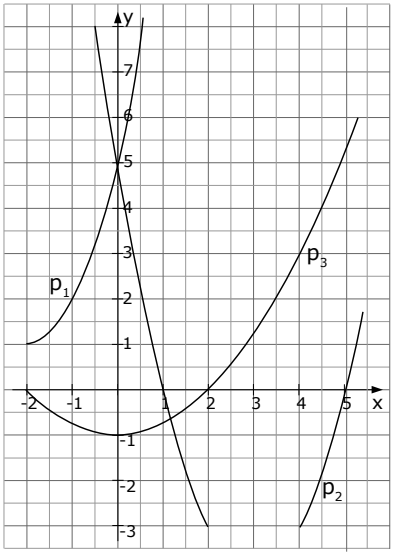
Der neue Gewinn für „☺☺" muss nun 13,50 € betragen. **G=13,50€**

Lösung von W2 a)

(A) $y = ax^2-1$

(B) $y = x^2-6x+5$

(C) $y = x^2+4x+q$



Welche Parabelgleichung gehört zu welchem Schaubild? Nun – es gibt mehrere Methoden.
Man könnte den Scheitelpunkt bestimmen, Symmetrie überprüfen, etc..
Am einfachsten ist jedoch die Punktprobe:

In die Gleichung (A) könnte man x=0 einsetzen. Das hat auch noch den Vorteil, dass der Parameter „a" wegfällt.
$x=0$ in $y=ax^2-1 \Rightarrow y=a\cdot 0^2-1=-1$
Die Parabel (A) enthält also den Punkt (0|-1)
(A) gehört damit zur Parabel p_3.

In die Gleichung (B) kann man eigentlich jeden x-Wert einsetzen. [Der x-Wert x=0 ist etwas ungeschickt, denn da erhält man y=5. Und der Punkt (0|5) liegt auf zwei Parabeln. Das ist doof.]
Setzt man x=1 in die Parabel ein, erhält man $y=1^2-6\cdot 1+5=0$. Der Punkt (1|0) liegt auf der Parabel p_2. **(B) gehört zur Parabel p_2.**

Für Parabel (C) bleibt nur noch p_1 übrig. **(C) gehört zur Parabel p_1.**

Vervollständigung der Funktionsgleichungen von (A) und (C):

Am einfachsten geht das, durch Einsetzen von Punkten.

Betrachten wir erst Gleichung (A). Diese gehört zum Schaubild p_3.

Man kann also jeden Punkt vom Schaubild p_3 einsetzen.

Z.B. kann man den Punkt P(2|0) einsetzen.

x=2 und y=0 in $y=a\cdot x^2-1$ einsetzen:

$\Rightarrow\ 0=a\cdot 2^2-1\ \Rightarrow\ 0=4a-1\ \Rightarrow\ a=0{,}25$ $\Rightarrow$ **$p_3: y_A=0{,}25\cdot x^2-1$**

Betrachten wir nun Gleichung (C). Diese gehört zum Schaubild p_1.

Man kann also jeden Punkt vom Schaubild p_1 einsetzen.

Z.B. kann man den Punkt P(-1|2) einsetzen.

x=-1 und y=2 in $y=x^2+4x+q$ einsetzen:

$\Rightarrow\ 2=(-1)^2+4\cdot(-1)+q\ \Rightarrow\ 2=1-4+q\ \Rightarrow\ 5=q$ $\Rightarrow$ **$p_1: y_C=x^2+4x+5$**

Bestimmung von g:

Die Gerade g geht durch die Scheitelpunkte von p_2 und p_3.

Wir brauchen also zuerst die Scheitelpunkte. Diese berechnet man über die Nullstelle der Ableitung.

Den Scheitelpunkt von p_2:

$p_2: y=x^2-6x+5\ \Rightarrow\ y'=2x-6$. Aus y'=0 folgt $2x-6=0\ \Rightarrow\ x=3$

y-Wert berechnen: x=3 in p_2. $y=3^2-6\cdot 3+5=9-18+5=-4\ \Rightarrow\ S_2(3|-4)$.

Den Scheitelpunkt von p_3:

$p_3: y=0{,}25\cdot x^2-1\ \Rightarrow\ y'=0{,}5\cdot x$. Aus y'=0 folgt $0{,}5x=0\ \Rightarrow\ x=0$

y-Wert berechnen: x=0 in p_3. $y=0{,}25\cdot 0^2-1=-1$ $\Rightarrow$ $S_3(0|-1)$.

Nun kennen wir zwei Punkte, durch die die Gerade g verläuft.

$S_2(3|-4)$ und $S_3(0|-1)$ in die ZPF einsetzen.

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1}$	S_2 und S_3 einsetzen
$\frac{-4-(-1)}{3-0}=\frac{y-(-1)}{x-0}$	zusammenrechnen
$\frac{-3}{3}=\frac{y+1}{x}$	links vereinfachen, danach $\vert\cdot x$
$-1\cdot x = y+1$	$\vert -1$
$-x-1 = y$	$\Rightarrow$ **$g: y = -1x-1$**

Nachweis, dass der Scheitelpunkt von p_1 auf g liegt:

Man setzt die Koordinaten des Scheitelpunkts in die Gerade g ein.

Dazu braucht man aber erst dessen Koordinaten.

$p_1: y=x^2+4x+5\ \Rightarrow\ y'=2x+4$. Aus y'=0 folgt $2x+4=0\ \Rightarrow\ x=-2$

y-Wert berechnen: x=-2 in p_1. $y=(-2)^2+4\cdot(-2)+5=1$ $\Rightarrow$ $S_1(-2|1)$.

Nun setzen wir S_1 in g ein:

$x_1=-2$ und y=1 in $g: y=-x-1\ \Rightarrow\ 1=-(-2)-1\ \Rightarrow\ 1=2-1$

Wir erhalten eine wahre Aussage. $\Rightarrow$ **S_1 liegt auf g**.

Lösung von W2 b)

Bestimmung der Parabel p_2:

Wir kennen den Scheitelpunkt von p_2, also verwenden wir die Scheitelform. $S_2(1{,}5|-3{,}25)$ in $y=a\cdot(x-x_S)^2+y_S$.

[Da es eine nach oben geöffnete Normalparabel ist, gilt a=1]

$y = 1\cdot(x-1{,}5)^2+(-3{,}25) = (x^2-3x+2{,}25)-3{,}25 = x^2-3x-1 \Rightarrow \underline{p_2: y=x^2-3x-1}$

Bestimmung des Schnittpunktes R:

$p_1 = p_2$

$\frac{1}{4}x^2-4 = x^2-3x-1 \quad | \cdot 4$

$x^2-16 = 4x^2-12x-4 \quad | -4x^2+12x+4$

$-3x^2+12x-12 = 0$

(p-q-Formel) (a-b-c-Formel)

$-3x^2+12x-12=0 \quad |:(-3)$

$x^2-4x+4=0$

$x_{1,2}=2\pm\sqrt{2^2-4}$

$= 2\pm\sqrt{0}$

$x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot(-3)\cdot(-12)}}{2\cdot(-3)}$

$= \frac{-12\pm\sqrt{144-144}}{-6}$

$= \frac{-12\pm\sqrt{0}}{-6}$

$x_{1,2}=2$

y-Wert: x=2 in p_2 [oder p_1]: $y=2^2-3\cdot2-1=-3 \Rightarrow \underline{R(\,2|-3\,)}$

Funktionsgleichung von h:

Von h kennt man zwei Punkte, also verwenden wir die PSF.

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ O(0|0) und R(2|-3) einsetzen

$\frac{-3-0}{2-0} = \frac{y-0}{x-0}$ zusammenrechnen

$-\frac{3}{2} = \frac{y}{x}$ |·x

$y = -\frac{3}{2}x \Rightarrow$ **$h: y = -\frac{3}{2}x$**

Berechnung des Flächeninhalts:

Zuerst brauchen wir die Nullstellen von p_1:

$\frac{1}{4}x^2-4=0 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2=4 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x_{1,2}=\pm4$

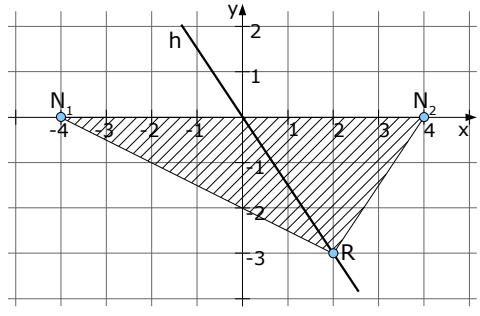
$\Rightarrow \underline{N_{1,2}(\pm4|0)}$

Den Flächeninhalt des Dreiecks N_1N_2R bestimmt man mithilfe der langen Flächeninhaltsformel. $N_1(-4|0)$ $N_2(4|0)$ $R(-2|3)$

$A=|\frac{1}{2}\cdot[x_1\cdot(y_2-y_3)+x_2\cdot(y_3-y_1)+x_3\cdot(y_1-y_2)]|$

$= |\frac{1}{2}\cdot[-4\cdot(0-3)+4\cdot(3-0)+(-2)\cdot(0-0)]|$

$= |\frac{1}{2}\cdot[\,12+12+0\,]| = 12$



$\Rightarrow$ **$A_\Delta = 12$**

[Alternativ: der geniale Lösungsweg zur Flächenberechnung:
Man denkt an $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$. g ist die Grundlinie, hier der Abstand von N_1 zu N_2, der wäre hier 8. h ist die Höhe des Dreiecks, das ist der Abstand von der x-Achse zum Punkt R, welcher in diesem Fall 3 ist.
Damit ist der Inhalt der Dreiecksfläche: $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h=\frac{1}{2}\cdot8\cdot3=12$. Fertig]

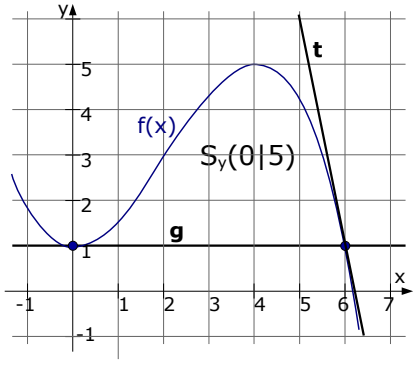
Bastians Behauptung:

Wenn die Gerade h den Flächeninhalt halbieren soll, geht es um die Fläche zwischen O(0|0), R und einer der beiden Nullstellen.

Betrachten wir z.B. das Dreieck: O, R, N_2.
Nun kann man entweder den Flächeninhalt mit der langen Flächeninhaltsformel rechnen [man kennt ja die Koordinaten aller drei Punkte] oder man wendet wieder die „geniale" Methode an, mit $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$:
g ist die Grundlinie des Dreiecks ORN_2, also die Strecke von O zu N_2 ⇒ $g=4$
h ist der Abstand von der x-Achse zum Punkt R ⇒ $h=3$
Die Fläche des Dreiecks ORN_2 beträgt $A=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6$.
⇒ Bastian ist voll das Brain und hat recht wenn er behauptet:
„h halbiert den Flächeninhalt des Dreiecks."

Lösung von W3 a)

Die Gerade g geht durch den Tiefpunkt von f(x) und ist parallel zur x-Achse. Eine Parallele zu x-Achse hat die Steigung m=0, also die Gleichung y=c.
Der Tiefpunkt [mit dem y-Wert y=1] liegt auf dieser Geraden y=c, so dass die Gerade g die Gleichung y=1 haben muss. ⇒ g : y=1
Den Schnittpunkt von g mit f(x) erhält man durch Gleichsetzen.



$f(x) = g$

$-\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{4}x^2+1 = 1$ |·8

$-x^3+6x^2+8 = 8$ |−8

$-x^3+6x^2 = 0$ „x^2" ausklammern

$x^2\cdot(-x+6) = 0$ Satz vom Nullprodukt

$x_1=0$ $\quad -x+6=0 \Rightarrow x_2=6$

Die y-Werte sind beide y=1 [zumindest wenn man in die Gerade y=1 einsetzt].
Die beiden Schnittpunkte sind also (0|1) und (6|1).
Beim Punkt (0|1) handelt es sich um den Tiefpunkt T.
Der andere Punkt muss also P sein ⇒ **P(6|1)**

Die Tangente t_1 an K_f in P:
Einen Punkt der Tangente kennen wir [P(6|1)], die Steigung erhalten wir über die erste Ableitung [siehe P5].

$m_{Tan}=f'(6)=-\frac{3}{8}\cdot 6^2+\frac{3}{2}\cdot 6 = -4,5$

Die Tangentengleichung bestimmen wir nun mit der PSF.

$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ m_{Tan} und P einsetzen

$-4,5 = \frac{y-1}{x-6}$ | · (x−6)

$-4,5\cdot(x-6) = y-1$

$-4,5x+27 = y-1$ | + 1

$-4,5x+28 = y$ ⇒ $t_1 : y=-4,5x+28$

Die Gerade h
ist parallel zur x-Achse, hat daher die Form y=c.
Da sie durch den Hochpunkt H(4|5) geht, hat h die Gleichung h : y = 5

Den Schnittpunkt Q, von t_1 und h
berechnet man, indem man t_1 und h gleichsetzt.

$t_1 = h$

$-4{,}5x+28 = 5 \quad |-28$

$-4{,}5x = -23 \quad \Rightarrow \quad x_Q = \frac{23}{4{,}5} \approx 5{,}11$

y-Wert von Q ist natürlich „5", wegen Gerade h. Q(5,11|5)

Den Wendepunkt W von K_f berechnen

$f''(x) = 0$

$-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}=0 \Rightarrow -\frac{3}{4}x=-\frac{3}{2} \Rightarrow x=2$

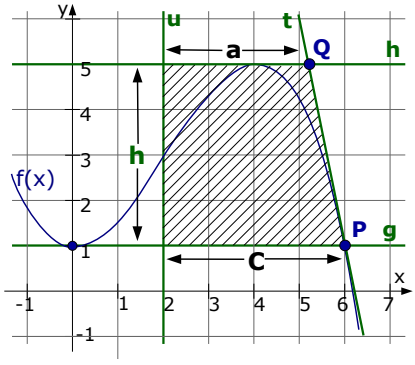
Den y-Wert von W liest man aus der Wertetabelle ab. W(2 | 3)

Die Gerade u ist parallel zur y-Achse, hat also die

Gleichung x=2 ⇒ u : x=2

Den Flächeninhalt des Trapezes

berechnet man mithilfe der Formel $A=\frac{a+c}{2}\cdot h$.



Die Grundlinie „a" beginnt bei x=2 und endet bei x=5,11. Es gilt also a=5,11−2 ⇒ a=3,11.

Die Grundlinie „c" beginnt bei x=2 und endet bei x=6. Es gilt also c=6−2 ⇒ c=4.

Die Höhe „h" beginnt bei y=1 und endet bei y=5. Es gilt also h=5−1 ⇒ h=4.

Der Flächeninhalt des Trapezes beträgt also:

$A = \frac{a+c}{2}\cdot h = \frac{3{,}11+4}{2}\cdot 4 = 14{,}22 \Rightarrow \mathbf{A=14{,}22}$

Die Tangente t_2 soll parallel zu t_1 sein,
das ist der Fall wenn beide Geraden bzw. Tangenten die gleiche Steigung haben. t_1 hat die Steigung von m=-4,5 somit muss die Tangente t_2 ebenfalls die Steigung m=-4,5 haben.

Da eine Tangentensteigung immer über f'(x) berechnet wird, gilt:

$f'(x) = -4{,}5$

$-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x=-4{,}5 \quad |\cdot 8$

$-3x^2+12x=-36 \quad |+36$

$-3x^2+12x+36 = 0$

(p-q-Formel) (a-b-c-Formel)

$-3x^2+12x+36=0 \quad |:(-3)$

$x^2-4x-12=0$

$x_{1,2}=2\pm\sqrt{2^2-(-12)}$

$= 2\pm\sqrt{16} = 2\pm 4$

$x_1=6 \quad x_2=-2$

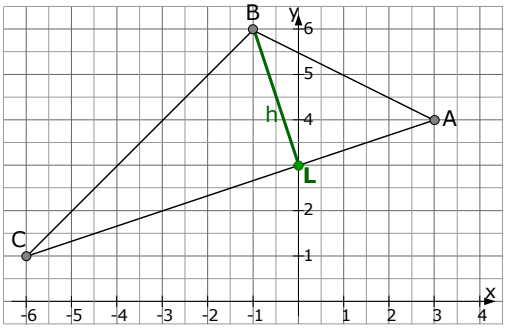
$x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot(-3)\cdot 36}}{2\cdot(-3)}$

$= \frac{-12\pm\sqrt{576}}{-6}$

$= \frac{-12\pm 24}{-6}$

$x_1=6$ gehört zum Punkt P, der interessiert uns nicht.
Der gesuchte Berührpunkt B hat den x-Wert $x_2=-2$.
Den y-Wert entnimmt man der Wertetabelle ⇒ **B(-2|5)**

Lösung von W4 a)



a) Die Höhe durch B im Dreieck ABC
Wir stellen zuerst die Geradengleichung der Höhe auf, schneiden diese mit der Gerade durch AC und erhaltenden den Lotfußpunkt L. Der Abstand von L zu B ist dann die Länge der Höhe.

Geradengleichung der Höhe:

AC hat die Steigung: $m_{AC}=\frac{1}{3}$
[AC war die Gerade g_2 aus Aufgabe P6]

Die Höhe hat die Steigung $m_h=-\frac{3}{1}=-3$ [negativer Kehrwert]

Nun wenden wir die PSF an, $m_h=-3$ und der Punkt ist B(-1|6).

$-3=\frac{y-6}{x-(-1)}$ zusammenrechnen

$-3=\frac{y-6}{x+1}$ |·(x+1)

$-3\cdot(x+1)=y-6$ Klammern auflösen

$-3x-3=y-6$ |+6

$-3x+3=y$ ⇒ $h_B: y = -3x+3$

Lotfußpunkt L ist Schnittpunkt von Höhe und AC [AC ist Gerade g_2]

$h_B = g_2$

$-3x+3=\frac{1}{3}x+3$ |·3

$-9x+9=x+9$ |−9−x

$-10x=0$ | :(-10)

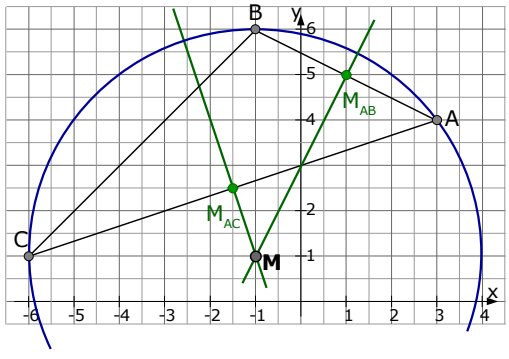
$x=0$

Den y-Wert erhält man durch Einsetzen von x=0 in h_B [oder g_2]. $y=-3\cdot0+3=3$ ⇒ L(0 | 3)

Abstand von B zu L bestimmen.

$h=d(B,L)=\sqrt{(x_B-x_L)^2+(y_B-y_L)^2}=\sqrt{(-1-0)^2+(6-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

Der Umkreis*mittelpunkt* ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.
Wir können beispielsweise die Mittelsenkrechte auf AC und die auf AB wählen und den Schnittpunkt beider berechnen.



Mittelsenkrechte auf AC:

Der Mittelpunkt von AC ist:

$M_{AC}\left(\frac{3+(-6)}{2}\middle|\frac{4+1}{2}\right)=M_{AC}(-1{,}5|2{,}5)$

Die Steigung der Mittelsenkrechten ist m=-3 [negativer Kehrwert von AC]

PSF anwenden

$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$ M_{AC} und m=-3 einsetzen

$-3=\frac{y-2{,}5}{x-(-1{,}5)}$ zusammenrechnen

$-3=\frac{y-2{,}5}{x+1{,}5}$ |·(x+1,5)

$-3\cdot(x+1{,}5)=y-2{,}5$ Klammern auflösen

$-3x-4{,}5=y-2{,}5$ $\quad|+2{,}5$

$-3x-2 = y$ $\quad\Rightarrow\quad$ Mittelsenkrechte : $y = -3x-2$

Mittelsenkrechte auf AB:

Der Mittelpunkt von AB ist:

$M_{AB}\left(\frac{3+(-1)}{2}\middle|\frac{4+6}{2}\right) = M_{AB}(1|5)$

Die Steigung der Mittelsenkrechten ist m=2

[negativer Kehrwert von AB, welches die Gerade g_3 war und die Steigung $m_3=-½$ hatte]

PSF anwenden

$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ $\quad$ M_{AB} und m=2 einsetzen

$2 = \frac{y-5}{x-1}$ $\quad|\cdot(x-1)$

$2\cdot(x-1)=y-5$ $\quad$ Klammern auflösen

$2x-2 = y-5$ $\quad|+5$

$2x+3 = y$ $\quad\Rightarrow\quad$ Mittelsenkrechte : $y = 2x+3$

Der Schnittpunkt beider Mittelsenkrechten ist der Umkreismittelpunkt.

$2x+3 = -3x-2$ $\quad|+3x-3$

$5x = -5$ $\quad|:5$

$x = -1$

Den y-Wert erreicht man durch Einsetzen von x=-1 in eine der Geradengleichungen: $y=2\cdot(-1)+3=1$

Der **Umkreismittelpunkt** lautet $\quad\Rightarrow\quad$ **M(-1|1)**

Der Umkreisradius ist der Abstand von M zu A [oder Abstand von M zu B, ...]

$r=d(M,A)=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2} = \sqrt{(-1-3)^2+(1-4)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

Der **Umkreisradius** hat die Länge von $\quad$ **r = 5**

Wenn das Dreieck ABD den gleichen Umkreismittelpunkt wie das Dreieck ABC haben soll, gibt es da mehrere Möglichkeiten.

Zum einen könnte man den Umkreismittelpunkt so berechnen wie vorher. Das ist aber umständlich. Es gibt einen netten Trick:

M(-1|1) soll ja auch der Umkreismittelpunkt von ABD sein, also müsste der Abstand von M zu A, zu B und zu D jeweils 5 sein.

Der Abstand von M zu A und derjenige von M zu B ist selbstverständlich unverändert 5.

Falls der Abstand von M zu D nun ebenfalls 5 ist, ist M tatsächlich der Umkreismittelpunkt von ABD.

$d(M,D)=\sqrt{(x_M-x_D)^2+(y_M-y_D)^2} = \sqrt{(-1-2)^2+(1-(-3))^2} = \sqrt{9+16} = 5$

Jipieh! **M ist der Umkreismittelpunkt von ABC und von ABD!**