

Realschulabschluss

an

Waldorfschulen

Prüfung 2018

Prüfung 2018

Pflichtbereich

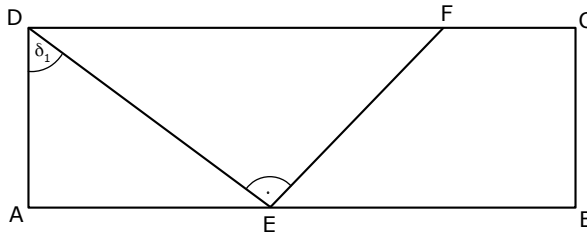
Aufgabe P 1:

Im Rechteck ABCD gilt:

$$\overline{AB} = 14,5 \text{ cm}$$

$$\overline{AD} = 5,4 \text{ cm}$$

$$\delta_1 = 52,0^\circ$$



(4 P)

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes EBCF.

(Kurzergebnisse auf Seite 8, Lösungen auf Seite 12)

Aufgabe P 2:

(aus Waldorf-RAP)

(4 P)

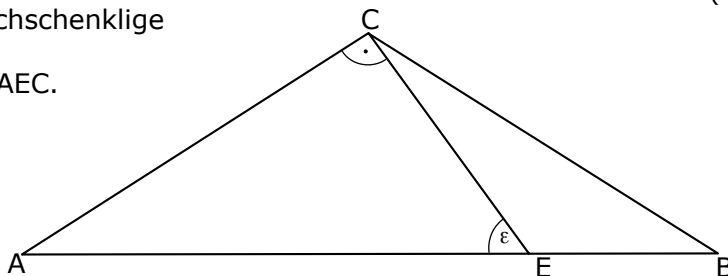
Gegeben sind das gleichschenklige Dreieck ABC und das rechtwinklige Dreieck AEC.

Es gilt:

$$\overline{AE} = 9,4 \text{ cm}$$

$$\varepsilon = 55,0^\circ$$

$$\overline{AC} = \overline{BC}$$



Berechnen Sie die Länge von \overline{BE} .

(Kurzergebnisse auf Seite 8, Lösungen auf Seite 12)

Aufgabe P 3:

(aus Waldorf-RAP)

(4 P)

Zu einer verschobenen, nach oben geöffneten Normalparabel p gehört die teilweise ausgefüllte Wertetabelle.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5						5

Geben Sie eine Funktionsgleichung der Parabel p an.

Ergänzen Sie die fehlenden Werte in der Tabelle.

Durch den Schnittpunkt R der Parabel p mit der y-Achse und dem Scheitelpunkt S verläuft die Gerade g.

Berechnen Sie die Steigung m der Geraden g.

(Kurzergebnisse auf Seite 8, Lösungen auf Seite 13)

Aufgabe P 4:

(aus Waldorf-RAP)

(4 P)

Geben Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung an:

$$\frac{4}{x} + \frac{2x-2}{x+2} = \frac{3x^2}{x^2+2x}$$

(Kurzergebnisse auf Seite 8, Lösungen auf Seite 13)

Aufgabe P 5:

(aus Waldorf-RAP)

(7,5 P)

Eine Funktion f hat die Gleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$$

Ihr Schaubild sei K_f .

Berechnen Sie die Funktionswerte für alle ganzzahligen Werte von x im Bereich $-3 \leq x \leq 5$.

Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K_f mit der x -Achse.

Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunktes von K_f und zeigen Sie rechnerisch, dass es sich um einen Hochpunkt handelt.

Tragen Sie die berechneten Werte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein und zeichnen Sie K_f (1 LE = 1 cm).

Berechnen Sie den Steigungswinkel von K_f im Schnittpunkt von K_f mit der x -Achse für $x < 0$.

(Kurzergebnisse auf Seite 8, Lösungen auf Seite 14)

Aufgabe P 6:

(aus Waldorf-RAP)

(7,5 P)

Die Gerade g_1 geht durch den Punkt $C(6|5)$ und ist rechtwinklig zu h :
 $y = -\frac{1}{3}x - 4$.

Die Gerade g_2 geht durch $A(-2|1)$ und C .

Die Gerade g_3 ist parallel zur 2. Winkelhalbierenden und schneidet die y -Achse in $S(0|-1)$.

Zeichnen Sie die Geraden in ein rechtwinkliges Koordinatensystem (1LE=1cm) ein.

Berechnen Sie die Gleichungen der Geraden g_1 , g_2 und g_3 .

Zeigen Sie, dass A auch auf g_3 liegt.

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes B von g_1 und g_3 .

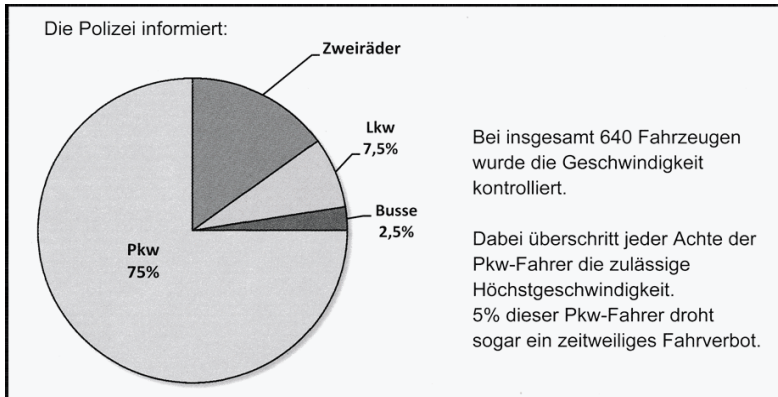
Um wie viel Prozent ist die Strecke \overline{AB} kürzer als die Strecke \overline{AC} ?

(Kurzergebnisse auf Seite 9, Lösungen auf Seite 15)

Aufgabe P 7:

(aus staatlicher-RAP 2014)

(3,5 P)



Wie viele Zweiräder wurden kontrolliert?

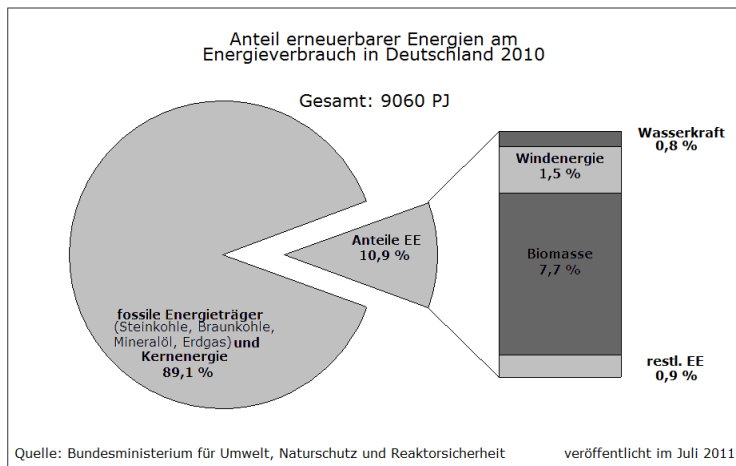
Wie viele der kontrollierten Pkw-Fahrer müssen mit einem zeitweiligen Fahrverbot rechnen?

(Kurzergebnisse auf Seite 9, Lösungen auf Seite 17)

Aufgabe P 8:

(aus staatlicher-RAP 2012)

(3 P)



Das Diagramm zeigt den Energieverbrauch in Deutschland im Jahr 2010.

Dabei unterscheidet man zwischen fossilen Energieträgern und erneuerbaren Energien. Der Anteil der erneuerbaren Energien (EE) ist zusätzlich in unterschiedliche Energiearten aufgeteilt.

Petajoule (PJ) ist eine Maßeinheit für Energie.

Berechnen Sie die im Jahr 2010 durch Windenergie erzeugte Energiemenge in Petajoule (PJ).

Wie hoch ist der prozentuale Anteil der Biomasse an den erneuerbaren Energien?

Pauline möchte die einzelnen Energiearten der erneuerbaren Energien (Wasserkraft, Windenergie, Biomasse und restliche EE) im obigen Kreisdiagramm darstellen.

Wie groß müsste der Mittelpunktswinkel für Wasserkraft sein?

(Kurzergebnisse auf Seite 9, Lösungen auf Seite 18)

Aufgabe P 9: (Pflichtteil-Aufgabe 2018 der staatlichen RS [mit TR])

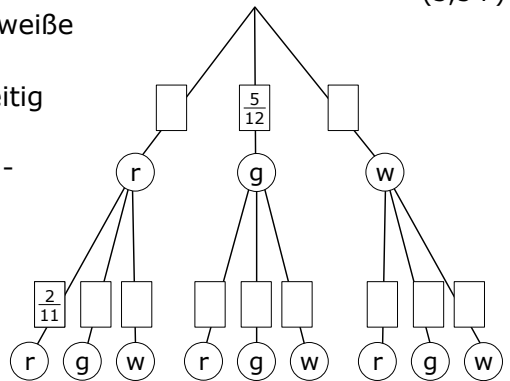
(3,5 P)

In einer Schale liegen rote, grüne und weiße Gummibärchen. Insgesamt sind es 12 Stück.

Antonetta nimmt ohne hinzusehen gleichzeitig zwei Gummibärchen aus der Schale.

Die Grafik zeigt ein unvollständiges Baumdiagramm dieses Zufallsversuchs.

Vervollständigen Sie dieses Baumdiagramm. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht Antonetta bei diesem Zufallsversuch



- genau ein rotes Gummibärchen?
- höchstens ein weißes Gummibärchen?

(Kurzergebnisse auf Seite 9, Lösungen auf Seite 19)

Wahlbereich

Aufgabe W 1a: (Wahlteil-Aufgabe 2018 der Waldorf-RS [mit TR])

(5,5 P)

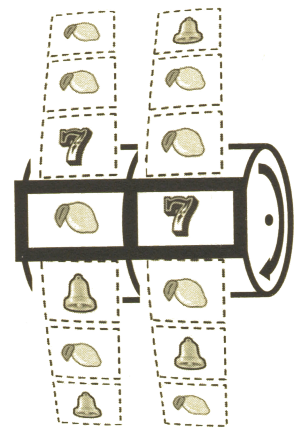
a) Im Technikunterricht wurde für ein Schulfest ein Zufallsgerät gebaut, bei dem sich zwei Walzen unabhängig voneinander drehen.

Die Walzen sind mit Symbolen beklebt. Auf jeder Walze sind vier Zitronen, zwei Glocken und eine Sieben abgebildet.

Wenn sie stehen bleiben, erkennt man im Sichtfenster zwei Symbole nebeneinander.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „zweimal Glocke“?

Das Zufallsgerät wird für ein Glücksspiel eingesetzt. Dazu wird nebenstehender Gewinnplan geprüft.



Berechnen Sie den Erwartungswert. Was bedeutet dies für den Spieler?

Der Einsatz soll auf 1,20€ erhöht werden. Der Gewinn für „zweimal Glocke“ sowie der Erwartungswert bleiben gleich.

Ereignisse	Gewinn
zweimal Glocke	4,00 €
zweimal Sieben	10,00 €
sonstige	kein Gewinn
Einsatz pro Spiel: 1,00 €	

Merle behauptet: „Der Gewinn für „zweimal Sieben“ beträgt dann etwa 20€“. Hat Merle recht? Begründen Sie rechnerisch.

(Kurzergebnisse auf Seite 10, Lösungen auf Seite 20)

Aufgabe W 2:

(aus Waldorf-RAP)

- a) Das Schaubild zeigt Ausschnitte einer verschobenen Normalparabel p_1 und einer Geraden g .

(5,5 P)

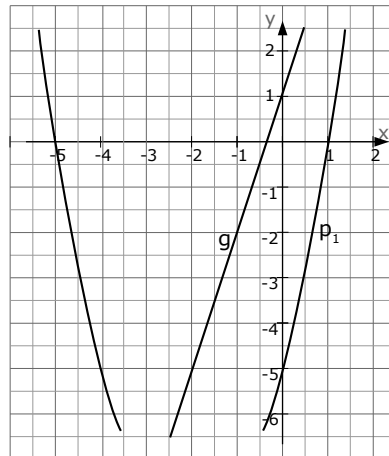
Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der Parabel p_1 und der Geraden g .

Die verschobene, nach oben geöffnete Normalparabel p_2 hat den Scheitelpunkt $S_2(5|-2)$.

Prüfen Sie rechnerisch, ob der Schnittpunkt Q der beiden Parabeln auf der Geraden g liegt.

Die Gerade h verläuft durch die beiden Scheitelpunkte S_1 und S_2 .

Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geraden h .



- b) Die Parabel p der Form $y=ax^2+c$ hat den Scheitel $S(0|-4,5)$. Sie geht durch den Punkt $P(-3|0)$.

(4,5 P)

Die Gerade g mit der Steigung $m=1,5$ geht durch den Punkt $R(0|0,5)$. Sie schneidet die Parabel p in den Punkten A und C .

Die Punkte A und C sind Eckpunkte des Rechtecks $ABCD$.

Zudem sind die Punkte A und C Anfangs- und Endpunkt einer Diagonalen dieses Rechtecks.

Die Seiten des Rechtecks verlaufen parallel zur x - bzw. y -Achse.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks.

(Kurzergebnisse auf Seite 10, Lösungen auf Seite 21)

Aufgabe W 3:

(aus Waldorf-RAP)

a) Gegeben ist die Funktionsgleichung von Aufgabe P5 des Pflichtbereichs:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 \quad (6,5 \text{ P})$$

Die Gerade t_1 ist die Tangente an K_f im Berührungspunkt $B_1(2|y)$.
Berechnen Sie die Gleichung von t_1 .

Die Tangente t_2 an K_f steht senkrecht auf t_1 .
Berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes B_2 .

Berechnen Sie die Gleichung von t_2 .

Die Gerade n_2 steht senkrecht auf t_2 und geht durch B_2 . Sie schneidet K_f .
Berechnen Sie die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes S .

Die Geraden t_1 , t_2 , n_2 und eine Gerade durch B_1 bilden ein Rechteck.
Berechnen Sie die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte A_1 und A_2 dieses Rechtecks.

(Kurzergebnisse auf Seite 11, Lösungen auf Seite 23)

Aufgabe W 4:

(aus Waldorf-RAP)

a) Die Punkte $A(-2|1)$, $B(3|-4)$ und $C(6|5)$ von Aufgabe P6 des Pflichtbereichs sind gegeben. (7 P)

Auf welcher Geraden g_4 lässt sich der Punkt B bewegen, ohne dass sich der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ändert?

Berechnen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Umkreises des Dreiecks ABC .

Außerdem sind die Punkte $P(3|6)$, $Q(0|5)$ und $R(-1|4)$ gegeben.

Zeigen Sie, dass das Dreieck PQR denselben Umkreismittelpunkt hat.

(Kurzergebnisse auf Seite 11, Lösungen auf Seite 25)

Tipps und Ergebnisse:

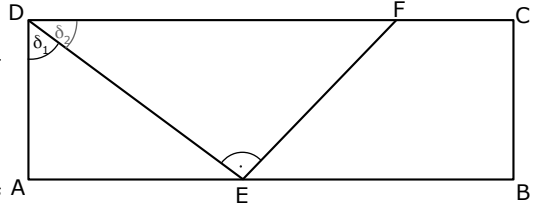
Tipps zu P1: (von Seite 2)

-Im Dreieck ADE über δ_1 und \overline{AD} die Seiten \overline{AE} und \overline{DE} berechnen, danach über \overline{AD} und \overline{AE} den Flächeninhalt.

- δ_2 berechnen.

-Im Dreieck DEF über \overline{DE} und δ_2 die Seite \overline{EF} berechnen, danach über \overline{DE} und \overline{EF} den Flächeninhalt.

-Den Flächeninhalt des Rechtecks ABCD berechnen, davon die Flächeninhalte der Dreiecke ADE und DEF berechnen



Ergebnisse in Kurzformat: $A_{ABCD}=78,3$ $\overline{AE}=6,91$ $\overline{DE}=8,77$ $A_{\triangle ADE}=18,66$ $\delta_2=38^\circ$
 $\overline{EF}=6,85$ $A_{\triangle DEF}=30,04$ $A_{\triangle EBCF}=29,6$

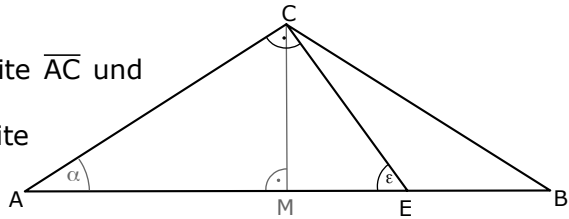
Tipps zu P2: (von Seite 2)

-Im Dreieck ACE über \overline{AE} und ε die Seite \overline{AC} und Winkel α berechnen.

-Im Dreieck ACM über \overline{AC} und α die Seite \overline{AM} berechnen.

-Über \overline{AM} kann man \overline{AB} berechnen.

-Über \overline{AB} und \overline{AE} kann man \overline{BE} berechnen.



Ergebnisse in Kurzformat: $\overline{AC}=7,7$ $\alpha=35^\circ$ $\overline{AM}=6,31$ $\overline{AB}=12,62$ $\overline{BE}=3,22$

Tipps zu P3: (von Seite 2)

-Aus der WT die Punkte (0|5) und (6|5) ablesen und diese in den Ansatz: $y=x^2+px+q$ einsetzen. Man erhält p und q und daraus die komplette Wertetabelle.

-Den Schnittpunkt mit der y-Achse liest man aus der WT ab $[x=0!]$.

-Den Scheitelpunkt S der Parabel bestimmen [Ableitung Null setzen].

-Die Steigung aus den beiden Punkten bestimmen.

Ergebnisse in Kurzformat: $p:y=x^2-6x+5$ $R(0|5)$ $S(3|-4)$ $m=-3$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Tipps zu P4: (von Seite 3)

-Definitionsmenge: jeden einzelnen Nenner Null setzen.

-Lösungsmenge: unten ausklammern, mit dem Hauptnenner multiplizieren.

Die entstehende Gleichung mit p-q-Formel / a-b-c-Formel lösen.

Ergebnisse in Kurzformat: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$ $L = \{4\}$

Tipps zu P5: (von Seite 3)

-Die Schnittpunkte mit der x-Achse erhält man, indem man $f(x)$ Null setzt.

-Den x-Wert des Extrempunkt erhält man, indem man die erste Ableitung Null setzt.

Die y-Werte erhält man durch Einsetzen von x in $f(x)$.

- Ob 's ein Hoch- oder Tiefpunkt ist, erhält man, indem man den x-Werte in die zweite Ableitung einsetzt. [Ist das Ergebnis negativ, so ist 's ein Hochpunkt und umgekehrt].
- Den Steigungswinkel erhält man über die Schnittwinkelformel. m_1 ist die Steigung der Funktion [kriegt man über $f'(x)$], m_2 ist die Steigung der x-Achse.

Ergebnisse in Kurzformat: $N_1(4,61|0)$ $N_2(-2,61|0)$ $H(1|3,25)$ $\alpha=61,08^\circ$

Wertetabelle:

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-0,75	1	2,25	3	3,25	3	2,25	1	-0,75

Tipps zu P6: (von Seite 3)

- Zeichnen: Blatt, Geodreieck, Stift greifen. Punkte einzeichnen und verbinden... [evtl müssen Sie bei Gerade g_1 kurz denken: da g_1 senkrecht auf h steht, ist die eine Steigung der negative Kehrwert der anderen Steigung. Da h die Steigung von $-1/3$ hat, muss g_1 die Steigung von $+3$ haben.]
- Die Gerade g_1 und g_3 über PSF berechnen [g_1 mit Punkt C und der Steigung $m_1=3$, g_3 mit dem Punkt S und $m_3=-1$ von der 2.Winkelhalbierenden].
- Die Gerade g_2 über ZPF berechnen [die Punkte A und C verwenden].
- A liegt auf g_3 , wenn die Punktprobe stimmt [x- und y-Wert von A in g_3 einsetzen].
- Den Schnittpunkt B erhält man durch Gleichsetzen von g_1 und g_3 ($g_1=g_3$).
- Die Längen der Strecken \overline{AB} und \overline{AC} erhält man über die Abstandformel [=Entfernungsformel]. Mit Dreisatz [oder Ähnlichem] den proz. Unterschied berechnen.

Ergebnisse in Kurzformat: $g_1:y=3x-13$; $g_2:y=\frac{1}{2}x+2$; $g_3:y=-x-1$; $B(3|-4)$,
 $\overline{AB}=7,07$ $\overline{AC}=8,94$ \overline{AB} ist 20,92% kürzer als \overline{AC} .

Tipps zu P7: (von Seite 4)

- Alle Fragen kann man mit dem Dreisatz lösen.

Ergebnisse in Kurzformat: Es wurden 96 Zweiräder kontrolliert.
 3 Fahrern droht ein zeitweiliges Fahrverbot.

Tipps zu P8: (von Seite 4)

- Restlos alle Fragen können mit dem Dreisatz beantwortet werden.

Ergebnisse in Kurzformat: 2010 wurden 135,9 PJ durch Windenergie erzeugt.
 Biomasse macht einen Anteil von 70,6% an den EE aus.
 Wasserkraft hätte einen Mittelpunktswinkel von $26,3^\circ$.

Tipps zu Aufg. P 9 (von Seite 5)

- Aus der W.S. $\frac{2}{12}$ der ersten Ebene berechnet man die Anzahl der grünen Kugeln, aus der W.S. $\frac{5}{11}$ der zweiten Ebene die Anzahl der roten Kugeln. Damit vervollständigt man das Baumdiagramm.
- Die W.S. für genau ein rotes Gummibärchen: Man zählt einfach alle Pfade, in welchen genau einmal „rot“ auftaucht. Dann diese Wahrscheinlichkeiten zusammenrechnen.
- Die W.S. für höchstens ein weißes Gummibärchen: Man zählt auch wieder alle Pfade, in welchen genau einmal oder keinmal „weiß“ auftaucht. Einfacher ist das Gegenereignis, also „genau zweimal weiß“ und diese W.S. von 100% abziehen. Dann diese Wahrscheinlichkeiten zusammenrechnen.

Ergebnisse in Kurzformat: Ursprünglich gab es 2 grüne, 6 rote und 4 weiße Gummibärchen.
 Die W.S. für genau ein rotes: $P(rg,rw,gr,wr) = \dots = 0,409$
 Die W.S. für höchstens ein weißes: $1-P(ww) = \dots = 0,909$

Tipps zu Aufg. W 1a (von Seite 5)

- Der Erwartungswert des Gewinns wird berechnet, indem man die Werte des Gewinns mit ihren Wahrscheinlichkeit multipliziert. Damit erhält man durchschnittliche Auszahlungen. Davon zieht man den Einsatz von 1,00 € ab.
- Wird das Spiel abgeändert, berechnet man wiederum einen Erwartungswert [ähnlich wie in der letzten Rechnung], der Gewinn für Sieben-Sieben nennt man X und löst die Gleichung zum Schluss nach X auf.

Ergebnisse in Kurzformat: $P(\text{Glocke-Glocke})=\frac{4}{49}$; Erwartungswert: Der Spieler verliert im Durchschnitt 0,47€ pro Spiel. Merle hat recht, der neue Gewinn für 7-7 liegt bei 19,77€.

Tipps zu W2 a) (von Seite 6)

- Aufstellen der Geraden g: irgendwelche zwei Punkte von g aus dem Schaubild ablesen und dann PSF anwenden. [geschickt wäre auch einfach b und m ablesen $\Rightarrow y=mx+b$]
- Aufstellen der Parabel p_1 : irgendwelche zwei Punkte von p aus dem Schaubild ablesen, in $y=x^2+px+q$ einsetzen und dann das entstehende Gleichungssystem lösen. [geschickt wäre, die beiden Nullstellen ablesen und dann die LFF verwenden]
- Die Gleichung von p_2 mithilfe der Scheitelpunktform aufstellen.
- Den Schnittpunkt Q der beiden Parabeln [durch Gleichsetzen] bestimmen, danach eine Punktprobe von Q mit g machen [die Koordinaten von Q in g einsetzen], um zu schauen, ob Q auf g liegt.
- Bestimmung von h: Der Scheitelpunkt von p_1 über die Ableitung bestimmen, danach mit S_1 und S_2 über ZPF die Gleichung von h bestimmen.

Ergebnisse in Kurzformat: $g:y=3x+1$, $p_1:y=x^2+4x-5$, $p_2:y=x^2-10x+23$
Q liegt auf g, $S_1(-2|-9)$, $h:y=x-7$

Tipps zu W2 b) (von Seite 6)

- Die Gleichung der Geraden g bestimmt man über die PSF [m und R sind gegeben].
- Die Gleichung der Parabel p bestimmen [eigentlich braucht man nur den Parameter „a“, indem man S in die Gleichung von p einsetzt].
- Die Schnittpunkte von p und g bestimmen [die heißen A und C].
- Nun eine Skizze des Rechtecks zeichnen. Die Seiten sind parallel zu x- und y-Achse, zwei Eckpunkte des Rechtecks sind A und C.
- Mit Hilfe des Skizze und den Koordinaten von A und C kann man einfach Länge und Breite des Rechtecks bestimmen und hat damit den Flächeninhalt.

Ergebnisse in Kurzformat: $g:y=1,5x+0,5$ $p:y=0,5x^2-4,5$ $A(5|8)$ $C(-2|-2,5)$.
Rechteckfläche= $7 \cdot 10,5=73,5$.

Tipps zu W3 a) (von Seite 7)

- Die Tangente t_1 erhält man mit der PSF. Ein Punkt ist B_1 , die Steigung erhält man über $f'(x)$.
- t_2 : die Steigung ist der negative Kehrwert von der Steigung von t_1 . Mit dem Ansatz $m=f'(x)$ erhält man den x-Wert des Berührungspunktes B_2 .
- Die Gerade n_2 hat die gleiche Steigung wie t_1 . Damit und mit dem Punkt B_2 erhält man die Gleichung von n_2 über die PSF.
- Den Schnittpunkt S bestimmt man durch Gleichsetzen von t_2 und $f(x)$.
- A_1 ist der Schnittpunkt von t_1 und t_2 . A_2 kann man über die umgekehrte Mittelpunktsformel bestimmen oder wieder als Schnittpunkt zweier Geraden.
- Die Geraden g , t_1 , h und u skizzieren. Den Flächeninhalt eines Trapezes berechnet man mit $A=\frac{1}{2}\cdot(a+c)\cdot h$. Die Strecken a , c und h kann man ablesen.
- t_2 und t_1 sind parallel, haben also beide die gleiche Steigung [$m=-4,5$ kam vorher raus]. Man setzt also $f'(x)=-4,5$ und erhält beide Berührungspunkte. Einer ist B, der andere ist gesucht.

Ergebnisse in Kurzformat: $B_1(2|3)$ $t_1:y=-\frac{1}{2}\cdot x+4$ $m_{t_2}=2$ $B_2(-3|-0,75)$ $t_2:y=2x+5,25$
 $n_2:y=-\frac{1}{2}\cdot x-2,25$ $S(7|-5,25)$ $A_1(-0,5|4,25)$ $A_2(-0,5|-2)$

Tipps zu W4 a) (von Seite 7)

- Eine Dreiecksfläche berechnet man über $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$. Betrachtet man AC als Grundlinie, ändert sich die Grundlinie und der Flächeninhalt des Dreiecks nicht. Damit muss auch die Höhe unverändert bleiben. B bewegt sich damit auf einer Geraden, die parallel zu AC ist. Nun kann man g_4 mit der PSF bestimmen.
- Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Also braucht man zwei Mittelsenkrechten, die man schneidet. [Jede Mittelsenkrechte erhält man mithilfe der PSF. Ihre Steigung ist der negative Kehrwert der Dreiecksseite, der Punkt ist der Mittelpunkt dieser Seite.]
- Der Umkreisradius ist der Abstand von einem der Eckpunkte zum Mittelpunkt des Umkreises [den wir eben errechnet haben].
- Das Dreieck PQR hat den gleichen Umkreismittelpunkt, wenn der Abstand von P, von Q und von D zum Umkreismittelpunkt genau so groß wie der eben errechnete Umkreisradius ist. [Es gibt auch noch andere Möglichkeiten, die aber länger gehen.]

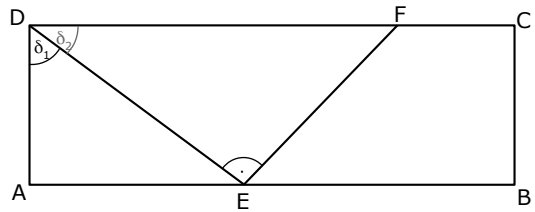
Ergebnisse in Kurzformat: $g_4:y=\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}$ Mittelsenkrechte auf AC: $y=-2x+7$,
Mittelsenkrechte auf AB: $y=x-2$, Mittelsenkrechte auf BC: $y=-\frac{1}{3}x+2$,
Umkreismittelpunkt: $M(3|1)$, Umkreisradius: $r=5$

Ausführliche Lösung:

Lösung von P1 (von Seite 2)

Uns sind beide Seitenlängen des Rechtecks ABCD gegeben. Wir können damit die Rechteckfläche berechnen.

$$A_{ABCD} = \overline{AD} \cdot \overline{AB} = 5,4 \cdot 14,5 = 78,3$$



$\triangle ADE$: [das einzige Dreieck, in welchem wir zwei Angaben plus rechte Winkel haben]

Bestimmung von \overline{DE} :

$$\cos(\delta_1) = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \quad | \cdot \overline{AB}$$

$$\overline{DE} \cdot \cos(\delta_1) = \overline{AD} \quad | : \cos(\delta_1)$$

$$\overline{DE} = \frac{\overline{AD}}{\cos(\delta_1)} = \frac{5,4}{\cos(52,0)} \approx 8,77^\circ$$

$$\Rightarrow A_{ABCD} = 78,3 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Bestimmung von \overline{AE} :

$$\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 = \overline{DE}^2$$

$$\Rightarrow \overline{AE} = \sqrt{\overline{DE}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{8,77^2 - 5,4^2} \approx 6,91 \Rightarrow \overline{AE} = 6,91 \text{ [cm]}$$

Bestimmung des Flächeninhaltes:

$$A_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} = \frac{1}{2} \cdot 5,4 \cdot 6,91 \approx 18,66 \Rightarrow A_{\triangle ADE} = 18,66 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Bestimmung von δ_2 :

$$\delta_2 = 90^\circ - \delta_1 = 90^\circ - 52,0^\circ = 38,0^\circ \Rightarrow \delta_2 = 38,0^\circ$$

$\triangle DEF$:

Bestimmung von \overline{EF} :

$$\tan(\delta_2) = \frac{\overline{EF}}{\overline{DE}} \quad | \cdot \overline{DE}$$

$$\overline{DE} \cdot \tan(\delta_2) = \overline{EF} \Rightarrow \overline{EF} = 8,77 \cdot \tan(38) \approx 6,85 \Rightarrow \overline{EF} = 6,85 \text{ [cm]}$$

Bestimmung des Flächeninhaltes:

$$A_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{EF} = \frac{1}{2} \cdot 8,77 \cdot 6,85 \approx 30,04 \Rightarrow A_{\triangle DEF} = 30,04 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Bestimmung der Fläche von EBCF:

$$A_{EBCF} = A_{ABCD} - A_{\triangle ADE} - A_{\triangle DEF} = 78,3 - 18,66 - 30,04 = 29,6 \Rightarrow A_{EBCF} = 29,6 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Lösung von P2 (von Seite 2)

Man beginnt immer in einem rechtwinkligen Dreieck, in welchem man zwei Angaben [plus rechter Winkel] hat.

In dieser Aufgabe ist das $\triangle ACE$:

$\triangle ACE$:

Bestimmung von α :

$$\alpha = 90^\circ - \varepsilon = 90^\circ - 55,0^\circ = 35^\circ$$

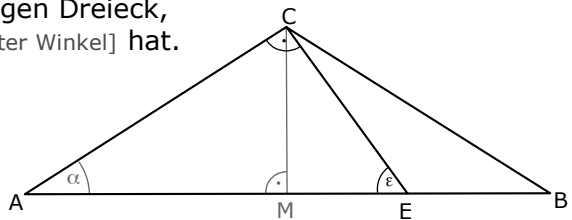
Bestimmung von \overline{AC} :

$$\sin(\varepsilon) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} \quad | \cdot \overline{AE}$$

$$\overline{AC} = \overline{AE} \cdot \sin(\varepsilon) = 9,4 \cdot \sin(55,0) = 7,70$$

$$\Rightarrow \alpha = 35,0^\circ$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = 7,7 \text{ [cm]}$$



$\triangle ACM$:

Das Dreieck ABC ist gleichschenkelig [$\overline{AB} = \overline{BC}$], daher teilt die Höhe \overline{CM} dieses Dreieck in zwei gleiche Teildreiecke. Daher entstehen bei M rechte Winkel und es gilt: $\overline{AM} = \overline{MB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$.

Bestimmung von \overline{AM} :

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} \quad | \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{AM} = \overline{AC} \cdot \cos(\alpha) = 7,7 \cdot \cos(35,0) \approx 6,31 \quad \Rightarrow \quad \overline{AM} = 6,31 \text{ [cm]}$$

Bestimmung von \overline{AB} :

$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AM} = 2 \cdot 6,31 = 12,62 \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 12,62 \text{ [cm]}$$

Bestimmung von \overline{BE} :

$$\overline{BE} = \overline{AM} - \overline{AE} = 12,62 - 9,4 = 3,22 \quad \Rightarrow \quad \overline{BE} = 3,22 \text{ [cm]}$$

Lösung von P3 (von Seite 2)

Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Normalparabel, für welche der Ansatz $y=x^2+px+q$ sinnvoll ist.

Aus der Wertetabelle kann man die Punkte $P_1(0|5)$ und $P_2(6|5)$ ablesen.

$$P_1 \text{ in } y: \quad 5=0^2+p \cdot 0+q \quad \Rightarrow \quad 5=q$$

$$P_2 \text{ in } y: \quad 5=6^2+p \cdot 6+q \quad [q=5 \text{ einsetzen}]$$

$$\Rightarrow 5=36+6p+5 \quad \Rightarrow \dots \Rightarrow p=-6 \quad \Rightarrow \quad p: y=x^2-6x+5$$

Nun kann man die fehlenden Werte ausrechnen:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Der Schnittpunkt R der Parabel mit der y-Achse

hat den x-Wert $x=0$. Aus der WT erkennt man die Koordinaten $\Rightarrow R(0|5)$

Den Scheitelpunkt errechnet man am einfachsten als Tiefpunkt indem man die erste Ableitung Null setzt.

$$y=x^2-6x+5 \Rightarrow y'=2x-6$$

$$y'=0 \Rightarrow 2x-6=0 \Rightarrow x=3$$

Den y-Wert des Scheitels erhält man aus der WT: $y=-4 \Rightarrow S(3|-4)$

Die Gerade g enthält die Punkte R und S.

Man könnte nun die komplette Geradengleichung der Gerade g bestimmen [über PSF oder so], wir brauchen aber nur die Steigung.

$$m_g = \frac{y_R - y_S}{x_R - x_S} = \frac{5 - (-4)}{0 - 3} = \frac{9}{-3} = -3 \quad \Rightarrow \quad m = -3$$

Lösung von P4 (von Seite 3)

$$\frac{4}{x} + \frac{2x-2}{x+2} = \frac{3x^2}{x^2+2x}$$

unten kann man im dritten Bruch „x“ ausklammern

$$\frac{4}{x} + \frac{2x-2}{x+2} = \frac{3x^2}{x \cdot (x+2)}$$

Um die Definitionsmenge zu bestimmen, setzt man jede einzelne „Klammer“, die in den Nennern auftaucht, Null.

$$\text{erste „Klammer“: } x=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$\text{zweite Klammer: } x+2=0 \Rightarrow x_2=-2 \quad \Rightarrow$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$$

Um die Lösungsmenge zu bestimmen, multipliziert man die Gleichung mit allen Klammern des Nenners.

$$\frac{4}{x} + \frac{2x-2}{x+2} = \frac{3x^2}{x \cdot (x+2)} \quad | \cdot x \cdot (x+2)$$

$$\frac{4}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \cdot (x+2) + \frac{2x-2}{\cancel{x+2}} \cdot \cancel{x} \cdot (x+2) = \frac{3x^2}{\cancel{x} \cdot (x+2)} \cdot \cancel{x} \cdot (x+2) \quad \text{kürzen}$$

$$4 \cdot (x+2) + (2x-2) \cdot x = 3x^2 \quad \text{ausrechnen}$$

$$4x+8 + 2x^2-2x = 3x^2$$

$$2x^2+2x+8 = 3x^2 \quad | -2x^2-2x-8$$

$$0 = x^2 - 2x - 8 = 0$$

(p-q-Formel)

(a-b-c-Formel)

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1^2 - (-8)}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$

$$= 1 \pm \sqrt{9}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$= 1 \pm 3$$

$$= \frac{2 \pm 6}{2}$$

$$\rightarrow x_1 = 4 \quad x_2 = -2$$

Sie sollten natürlich nur den Weg entweder über p-q-Formel oder über a-b-c-Formel rechnen.

Die Zahl „-2“ taucht bereits in der Definitionsmenge auf.
Sie kann also nicht Teil der Lösungsmenge sein.

$$-2 \notin D \quad \Rightarrow$$

$$L = \{4\}$$

Lösung von P5 (von Seite 3)

Bemerkung: An dieser Aufgabe ist außergewöhnlich, dass es sich um eine Funktion zweiten Grades handelt. Normalerweise geht es in Aufgabe P5 immer um eine Funktion dritten Grades. Vom Stil und vom Prinzip her, unterscheidet sich die Aufgabe jedoch nicht wesentlich von den anderen Jahrgängen.

Die Berechnung der Funktionswerte erfolgt natürlich mit dem Taschenrechner.

Wertetabelle:

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-0,75	1	2,25	3	3,25	3	2,25	1	-0,75

Für die Schnittpunkte mit der x-Achse setzt man die Funktion Null.

$$-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = 0 \quad | \cdot (-4)$$

Falls Sie die a-b-c-Formel verwenden, müssen Sie nicht unbedingt mit „-4“ multiplizieren, man umgeht so jedoch die Brüche.

$$x^2 - 2x - 12 = 0$$

(p-q-Formel)

(a-b-c-Formel)

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1^2 - (-12)}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1}$$

$$= 1 \pm \sqrt{13}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{52}}{2}$$

$$\approx 1 \pm 3,61$$

$$\approx \frac{2 \pm 7,21}{2}$$

$$\rightarrow x_1 \approx 4,61 \quad x_2 \approx -2,61$$

$$\Rightarrow N_1(4,61|0) \quad N_2(-2,61|0)$$

Sie sollten natürlich nur den Weg entweder über p-q-Formel oder über a-b-c-Formel rechnen.

Die Extrempunkte berechnet man, indem man $f'(x) = 0$ setzt.

Wir leiten wir $f(x)$ zweimal ab [$f''(x)$ brauchen wir jetzt eigentlich noch nicht, aber später].

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$$

$$f'(x) = -\frac{2}{4}x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}$$

Die erste Ableitung Null setzen.

$$f'(x) = 0$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \quad | \cdot 2$$

$$-x + 1 = 0 \quad | -1 \quad | \cdot (-1)$$

$$x = 1$$

Das ist der x-Wert des Extrempunktes.

Den y-Wert liest man aus der Wertetabelle ab.

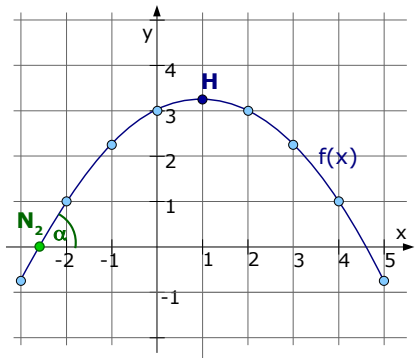
⇒ **EP₁(1|3,25)**

Untersuchung des Punktes auf Hoch- oder Tiefpunkt.

Dazu setzt man den x-Wert in $f''(x)$ ein und überprüft das Vorzeichen.

$$x=1 \text{ in } f''(x): f''(1) = -\frac{1}{2} < 0$$

⇒ Hochpunkt bei **H(1 | 3,25)**



Der Steigungswinkel im Schnittpunkt mit x-Achse:

Wir haben vorher bereits zwei Schnittpunkte mit der x-Achse berechnet. Da $y < 0$ gelten soll, geht es wohl um den Punkt $N(-2,61|0)$.

Einen Schnittwinkel berechnet man am besten

mit der Schnittwinkelformel: $\tan(\alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$

Da es um den Schnittwinkel zwischen Funktion und x-Achse geht, ist eine Steigung die der Funktion $f(x)$ und die andere Steigung ist die der x-Achse.

Die Steigung der x-Achse ist Null.

$$\Rightarrow m_2 = 0$$

Die Steigung der Funktion berechnet man, indem man den x-Wert (der

Nullstelle) in die Ableitung einsetzt. $\Rightarrow m_1 = f'(-2,61) = -\frac{1}{2} \cdot (-2,61) + \frac{1}{2} \approx 1,81$

Berechnung des Schnittwinkels:

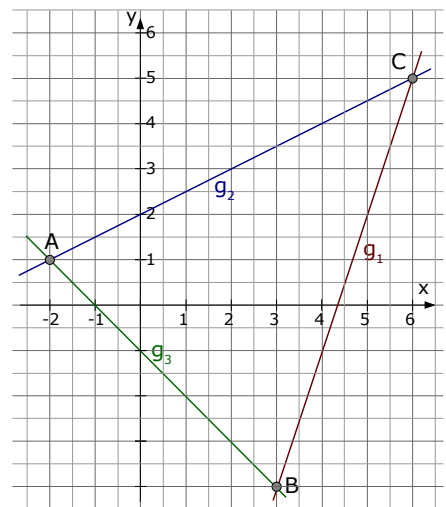
$$\tan(\alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{1,81 - 0}{1 + 1,81 \cdot 0} = 1,81 \quad \Rightarrow \alpha = \arctan(1,81) \approx 61,08^\circ \quad (1)$$

Lösung von P6 (von Seite 3)

Einzeichnen von g_1 : Wenn man die Gerade h nicht einzeichnen will, kann man sich überlegen, dass h die Steigung von $m_h = -1/3$ hat. Da die Gerade g_1 rechtwinklig auf h steht, hat g_1 die Steigung von g den Wert $m_1 = +3/1 = 3$. g_1 hat also die Steigung $m_1 = 3$ und geht durch $C(6|5)$.

Einzeichnen von g_2 : Strich durch A und C ziehen – Fertig.

Einzeichnen von g_3 : Die zweite Winkelhalbierende hat die Gleichung $y = -x$ und damit die Steigung $m = -1$. Daher hat auch g_3 die Steigung $m_3 = -1$. Zusammen mit dem Punkt $S(0|-1)$ kann man g_3 zeichnen.



1 Wahrscheinlich kennen Sie statt „ $\arctan(1,81)$ “ die Bezeichnung „ $\tan^{-1}(1,81)$ “.

Bestimmung der Geraden g_1 :

Wir haben uns vorher überlegt, dass g_1 die Steigung $m_1=3$ hat und durch $C(6|5)$ geht. Wir können g_1 daher mit der PSF aufstellen.

$$m_1 = \frac{y-y_c}{x-x_c} \quad m_1=3 \text{ und } C(6|5) \text{ einsetzen}$$

$$3 = \frac{y-5}{x-6} \quad | \cdot (x-6)$$

$$3 \cdot (x-6) = y-5 \quad \text{vereinfachen}$$

$$3x-18 = y-5 \quad | +5$$

$$3x-13 = y \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{g_1 : y = 3x-13}$$

Bestimmung der Geraden g_2 :

Man kennt zwei Punkte, also wendet man ZPF an:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{x-x_1} \quad A \text{ und } C \text{ einsetzen}$$

$$\frac{5-1}{6-(-2)} = \frac{y-1}{x-(-2)} \quad \text{zusammenfassen}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{y-1}{x+2} \quad \text{links kürzen, danach } | \cdot (x+2)$$

$$\frac{1}{2} \cdot (x+2) = y-1 \quad \text{Klammern auflösen}$$

$$\frac{1}{2}x+1 = y-1 \quad | +1$$

$$\frac{1}{2}x+2 = y \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{g_2 : y = \frac{1}{2}x+2}$$

Bestimmung der Geraden g_3 :

Wir haben uns vorher überlegt, dass g_3 die Steigung $m_3=-1$ hat und durch $S(0|-1)$ geht. Wir können g_3 daher ebenfalls mit der PSF aufstellen.

$$m_3 = \frac{y-y_s}{x-x_s} \quad m_3=-1 \text{ und } S(0|-1) \text{ einsetzen}$$

$$-1 = \frac{y-(-1)}{x-0} \quad \text{vereinfachen}$$

$$-1 = \frac{y+1}{x} \quad | \cdot x$$

$$-1 \cdot x = y+1 \quad | -1$$

$$-x-1 = y \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{g_3 : y = -x-1}$$

Wie zeigt man, dass der Punkt A auf g_3 liegt?

Man setzt die Koordinaten von A in g_3 ein.

$$A(-2|1) \text{ in } y=-x-1$$

$$1 = -(-2)-1$$

$$1 = 2 - 1$$

\Rightarrow wahre Aussage \Rightarrow

A liegt auf g_3

Den Schnittpunkt der zwei Geraden g_1 und g_3 bestimmt man durch Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen.

$$g_1 = g_3$$

$$3x-13 = -x-1 \quad | +x+13$$

$$4x = 12 \quad | : 4$$

$$x = 3$$

Den y-Wert erhält man, wenn man $x=3$ in die Gleichung von g_1 oder g_3 einsetzt.

$$x=3 \text{ in } g_1 : y = 3 \cdot 3 - 13 = -4$$

$$\Rightarrow \mathbf{B(3|-4)}$$

Wie viel Prozent ist \overline{AB} kürzer als \overline{AC} ?

Die Streckenlänge \overline{AB} bestimmt man mit der Entfernungsformel:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4-1)^2 + (3-(-2))^2} = \\ = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{50} \approx 7,07$$

Die Streckenlänge \overline{AC} bestimmt man ebenfalls mit der Entfernungsformel.

$$d(A,C) = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (6-(-2))^2} = \\ = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} \approx 8,94$$

Wie viel Prozent ist die Strecke \overline{AB} kürzer als die Strecke \overline{AC} ?

Wir machen das mit dem Dreisatz. [Andere Methoden gehen natürlich auch.]

Die Frage bezieht sich auf die Strecke \overline{AC} , also entspricht die Länge von \overline{AC} den 100%.

$$\begin{array}{r} 8,94 \text{ } 100\% \\ 7,07 \text{ } x \end{array}$$

Über Kreuz multiplizieren ...

$$\Rightarrow 8,94 \cdot x = 7,07 \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{7,07 \cdot 100 \%}{8,94} = 79,08\%$$

Das sind 79,08% weniger als \overline{AC} [mit 100%]

\Rightarrow **Die Strecke \overline{AB} ist 20,92% kürzer als die Strecke \overline{AC} .**

Lösung von P7 (von Seite 4)

Wieviel Zweiräder wurden kontrolliert ...

Im Text neben der Grafik steht, dass 640 Fahrzeuge kontrolliert wurden. Jetzt müssen wir nur noch wissen, wieviel Prozent diese Zweiräder ausmachen.

Prozentualer Anteil der Zweiräder = $100\% - 75\% - 7,5\% - 2,5\% = 15\%$.

\Rightarrow Es gibt 640 Fahrzeuge insgesamt und 15% davon sind Zweiräder.

$$\begin{array}{r} 640 \text{ } 100\% \\ x \text{ } 15\% \end{array}$$

Über Kreuz multiplizieren ...

$$\Rightarrow 640 \cdot 15\% = 100\% \cdot x \Rightarrow x = \frac{640 \cdot 15 \%}{100 \%} = 96$$

\Rightarrow **Es wurden 96 Zweiräder kontrolliert.**

Wieviel Pkw-Fahrer müssen mit einem Fahrverbot rechnen ...

Wieviel Pkw-Fahrer gab es überhaupt? 75% von allen 640 Fahrzeugen waren Pkws. D.h.

$$\begin{array}{r} 640 \text{ } 100\% \\ x \text{ } 75\% \end{array}$$

Über Kreuz multiplizieren ...

$$\Rightarrow 640 \cdot 75\% = 100\% \cdot x \Rightarrow x = \frac{640 \cdot 75 \%}{100 \%} = 480$$

\Rightarrow Es gibt 480 Pkw-Fahrer

Jeder achte Fahrer überschreitet die Höchstgeschwindigkeit und davon drohen 5% ein Fahrverbot.

Es gibt 480 Pkw-Fahrer. Jeder achte Fahrer davon sind $480:8=60$ Fahrer. 60 Fahrer überschritten also die Höchstgeschwindigkeit. Davon droht 5% ein Fahrverbot. Das sind:

$$\begin{array}{ccc} 60 & \times & 100\% \\ x & \times & 5\% \end{array}$$

Über Kreuz multiplizieren ...

$$\Rightarrow 60 \cdot 5\% = 100\% \cdot x \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 5\%}{100\%} = 3$$

⇒ **3 Fahrern droht ein zeitweiliges Fahrverbot.**

Lösung von P8 (von Seite 4)

Erst mal werden Sie feststellen, dass die Aufgabe P8 anfangs ziemlich viel Text enthält. Die erste Frage ist die nach der Windenergiemenge, die im Jahr 2010 erzeugt wurde.

Der gesamte Energiebedarf lag 2010 bei 9060 PJ [die Einheit „PJ“ ist unwichtig]. Der Anteil der Windenergie daran lag bei 1,5%.

$$\begin{array}{ccc} 9060 & \times & 100\% \\ x & \times & 1,5\% \end{array}$$

Über Kreuz multiplizieren ...

$$\Rightarrow 9060(\text{PJ}) \cdot 1,5\% = 100\% \cdot x \Rightarrow x = \frac{9060 \cdot 1,5\%}{100\%} = 135,9 \text{ (PJ)}$$

⇒ **2010 wurde eine Energiemenge von 135,9 PJ durch Windenergie erzeugt.**

Der prozentuale Anteil der Biomasse an den EE ...

Wir brauchen den Anteil der Biomasse an den EE. D.h. wir tun so, als ob die EE jetzt „das Gesamte“ sind. D.h. die EE sind nun die 100%.

Die 10,9%, die die EE bisher ausgemacht haben, werden nun zu 100% und wir müssen gucken, zu was die 7,7% der Biomasse werden.

$$\begin{array}{ccc} 10,9\% & \times & 100\% \\ 7,7\% & \times & x \end{array}$$

Über Kreuz multiplizieren ...

$$\Rightarrow 7,7\% \cdot 100\% = 10,9\% \cdot x \Rightarrow x = \frac{7,7\% \cdot 100\%}{10,9\%} \approx 70,6\%$$

⇒ **Biomasse macht einen Anteil von 70,6% an den EE aus.**

Der Mittelpunktswinkel der Wasserkraft ...

Erstmal rechnen wir, wie bei der letzten Frage, aus welchen prozentualen Anteil die Wasserkraft an den EE ausmacht.

$$\begin{array}{ccc} 10,9\% & \times & 100\% \\ 0,8\% & \times & x \end{array}$$

Über Kreuz multiplizieren ...

$$\Rightarrow 0,8\% \cdot 100\% = 10,9\% \cdot x \Rightarrow x = \frac{0,8\% \cdot 100\%}{10,9\%} \approx 7,3\%$$

⇒ Wasserkraft macht einen Anteil von 7,3% an den EE aus.

Anschließend schauen wir, welcher Mittelpunktswinkel dem Anteil von 7,3% entspricht. Der volle Winkel [ein ganzer Kreis] macht beim Kreisdiagramm 360° aus. Den Rest macht der Dreisatz.

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & \times & 100\% \\ x & \times & 7,3\% \end{array}$$

Über Kreuz multiplizieren ...

$$\Rightarrow x \cdot 100\% = 360^\circ \cdot 7,3\% \Rightarrow x = \frac{360^\circ \cdot 7,3\%}{100\%} \approx 26,3^\circ$$

⇒ **Wasserkraft hätte im Kreisdiagramm einen Mittelpunktswinkel von 26,3°**

Lösung von Aufg. P.9 (von Seite 5)

Vervollständigen wir erst das Baumdiagramm.

In der oberen Ebene, also im ersten Zug, hat „grün“ eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{12}$.

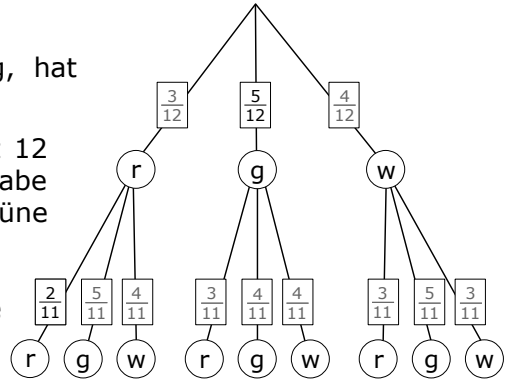
Der Nenner, die „12“, spricht für insgesamt 12 Kugeln, was zu den Angaben aus der Aufgabe passt. Der Zähler, die „5“, spricht für 5 grüne Kugeln.

⇒ es gab ursprünglich 5 grüne Kugeln!

In der zweiten Ebene ist bekannt, dass die zweite rote Kugel eine W.S. von $\frac{2}{11}$ hat.

Die „11“ aus dem Nenner ist logisch, denn im zweiten Zug gibt es nur noch 11 Kugeln. Die „2“ aus dem Zähler, sagt, dass es im zweiten Zug noch 2 rote Kugeln gab. Da [in diesem Pfad] bereits eine rote gezogen wurde, muss es ursprünglich 3 rote Kugeln gegeben haben. ⇒ es gab ursprünglich 3 rote Kugeln!
5 grüne, 3 rote ⇒ es gab ursprünglich 4 weiße Kugeln!

Mit diesen Angaben kann man den Baum vervollständigen.



Die Wahrscheinlichkeit für genau ein rotes Gummibärchen:

Es gibt zwei Ziehungen. Genau ein rotes tritt in folgenden Pfaden auf: rg, rw, gr, wr.

$$P(\text{rg}, \text{rw}, \text{gr}, \text{wr}) = \frac{3}{12} \cdot \frac{5}{11} + \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{9}{22} \approx 0,409 \hat{=} 40,9\%$$

Die Wahrsch. für genau ein rotes Gummibärchen beträgt 40,9%

Die Wahrscheinlichkeit für höchstens ein weißes Gummibärchen:

„höchstens ein“ weißes Gummibärchen beinhaltet die Fälle:

„Kein weißes“ und „ein weißes“ Gummibärchen.

Wenn Sie das Baumdiagramm durchschauen, werden Sie ziemlich viele dieser Pfade finden. Das ist blöd.

Geschickter ist das Gegenereignis: was darf *nicht* passieren?

Bei „höchstens ein weißes“ sollte nicht der Fall „zwei weiße“ eintreffen.

Wir rechnen also den Fall „zwei weiße“ aus, das ist das Gegenereignis und ziehen diese Wahrscheinlichkeit von 1 [also 100%] ab.

$$P(\text{höchstens ein weißes}) = 1 - P(\text{zwei weiße}) = 1 - P(\text{ww}) = 1 - \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11}$$

$$= \frac{10}{11} \approx 0,909 \hat{=} 90,9\%$$

Die Wahrsch. für höchstens ein weißes Gummibärchen beträgt 90,9%.

Wahlteil

Lösung von Aufg. W 1a (von Seite 5)

Abkürzungen:

$P(7)$: ist die Wahrscheinlichkeit, dass in *einer* Walze die „7“ erscheint.

$P(G)$: ist die Wahrscheinlichkeit, dass in *einer* Walze eine Glocke erscheint.

$P(Z)$: ist die Wahrscheinlichkeit, dass in *einer* Walze eine Zitrone erscheint.

Es gilt:

$$P(7) = \frac{1}{7} \qquad P(G) = \frac{2}{7} \qquad P(Z) = \frac{4}{7}$$

Das Ereignis „zweimal Glocke“ heißt: Auf der ersten Walze Glocke, auf der

zweiten Walze ebenfalls Glocke. $\Rightarrow P(GG) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{49} \approx 0,082 \hat{=} 8,2\%$

Das Ereignis „zweimal Sieben“ brauchen wir später für den Erwartungswert, es

berechnet sich ähnlich: $P(7,7) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{49} \approx 0,020 \hat{=} 2,0\%$

Den Erwartungswert berechnet man, indem man alle Gewinnmöglichkeiten mit den Wahrscheinlichkeiten multipliziert.

Wir ignorieren zuerst den Einsatz und berechnen den Erwartungswert für das Geld, das bei Gewinn *ausgezahlt* wird.

Ereignisse	Gewinn
zweimal Glocke	4,00 €
zweimal Sieben	10,00 €
sonstige	kein Gewinn
Einsatz pro Spiel: 1,00 €	

Abbildungen	Glocke-Glocke	Sieben-Sieben	sonstige
Gewinn	4,00 €	10,00 €	0€
Wahrscheinl.	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{49}$	egal

Der Erwartungswert für die Auszahlung beträgt:

$$E(x) = 4,00 \cdot \frac{4}{49} + 10,00 \cdot \frac{1}{49} + 0 \cdot \text{egal} \approx 0,53€$$

Im Durchschnitt werden also 0,53€ an den Spieler ausgezahlt.

Da der Einsatz 1,00€ beträgt, verliert der Spieler im Durchschnitt $0,53€ - 1,00€ = -0,47€$.

\Rightarrow Der Spieler verliert: **$E(x) = 0,47€$**

Der Einsatz soll nun 1,20€ betragen.

Da der Erwartungswert gleich bleiben soll, muss an den Spieler: $1,20€ - 0,47€ = 0,73€$ ausbezahlt werden.

Die Gewinnauszahlung bei Sieben-Sieben ändert sich, der Rest bleibt gleich.

Ereignisse	Gewinn
zweimal Glocke	4,00 €
zweimal Sieben	X
sonstige	kein Gewinn
Einsatz pro Spiel: 0,50 €	

Abbildungen	Glocke-Glocke	Sieben-Sieben	sonstige
Gewinn	4,00 €	10,00 €	0€
Wahrscheinl.	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{49}$	egal

Nun berechnen wir wieder den Erwartungswert [in Anhängigkeit von X], setzen diesen gleich 0,73 und lösen anschließend nach X auf.

Der neue Erwartungswert beträgt:

$$E_{\text{neu}}(x) = 4,00 \cdot \frac{4}{49} + X \cdot \frac{1}{49} + 0 \cdot \text{egal}$$

Da $E_{\text{neu}}(X) = 0,73$ sein soll, gilt:

$$0,73 = 4,00 \cdot \frac{4}{49} + X \cdot \frac{1}{49} + 0 \cdot \text{egal}$$

vereinfachen

$$0,73 = \frac{16}{49} + \frac{1}{49} \cdot X$$

| · 49

$$35,77 = 16 + 1 \cdot X$$

| -16

$$19,77 = X$$

Der neue Gewinn für „zweimal Sieben“ muss nun 19,77 € betragen.

Merle hat's voll drauf, die ist wohl ein kleines Superbrain.

G=19,77€

Lösung von W2 a) (von Seite 6)

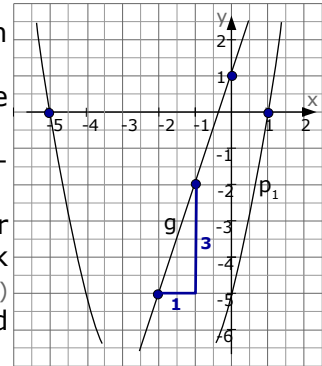
Beginnen wir mit dem Aufstellen der Geraden g.

Man könnte zwei Punkte der Geraden ablesen und dann PSF anwenden. Ist aber kompliziert.

Genialer wäre es den y-Achsenabschnitt und die Steigung abzulesen.

Der y-Achsenabschnitt ist der Schnittpunkt mit der y-Achse [S(0|1)] ⇒ b=1.

Für die Steigung liest man zwei beliebige Punkte der Gerade ab und betrachtet das Steigungsdreieck dazwischen [hier habe ich die Punkte (-2|-5) und (-1|-2) gewählt]. Man geht vom unteren Punkt 1 nach rechts und 3 nach oben, die Steigung ist daher: $m = \frac{3}{1} = 3$



Die Gerade hat also die Gleichung: $y = m \cdot x + b$

$$\Rightarrow \mathbf{g : y = 3x + 1}$$

Die Parabel p_1 ist eine Normalparabel, hat somit die Form: $y = x^2 + px + q$.

Laut Skizze sind die beiden Nullstellen $N_1(1|0)$ und $N_2(-5|0)$ Punkt der Parabel. Man könnte die Koordinaten in die Parabelgleichung einsetzen und p und q berechnen. Ist aber auch uncool und zu lang.

Genialer ist die LFF [LinearFaktorForm] der Parabel. $y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

Hierbei ist $a = 1$ [weil Normalparabel] und x_1 bzw. x_2 sind die Nullstellen.

In unserem Fall lautet die Parabelgleichung also: $y = 1 \cdot (x - 1) \cdot (x - (-5))$,

vereinfacht: $y = (x - 1)(x + 5) = x^2 - x + 5x - 5$

$$\Rightarrow \mathbf{p_1 : y = x^2 + 4x - 5}$$

Die Parabel p_2 hat den Scheitelpunkt $S_2(5|-2)$. Da kann man wunderbar mit der Scheitelform ansetzen: $y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$.

Hierbei ist „a“ der Streckfaktor [bei Normalparabel $a = 1$], „ x_s “ und „ y_s “ sind die Koordinaten des Scheitelpunktes, also $x_s = 5$, $y_s = -2$

$$\Rightarrow y = 1 \cdot (x - 5)^2 + (-2) = (x - 5)^2 - 2 = x^2 - 10x + 25 - 2$$

$$\Rightarrow \mathbf{p_2 : y = x^2 - 10x + 23}$$

Q ist der Schnittpunkt beider Parabeln. Man erhält ihn durch Gleichsetzen der beiden Parabeln.

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 \\ x^2 + 4x - 5 &= x^2 - 10x + 23 && | -x^2 + 10x + 5 \\ 14x &= 28 && \Rightarrow x_Q = 2 \end{aligned}$$

$x = 2$ in p_1 einsetzen [p_2 würde natürlich auch gehen].

$$y_Q = 2^2 + 4 \cdot 2 - 5 = 7$$

⇒

$$\mathbf{Q(2|7)}$$

Liegt Q auf der Geraden g? Einfach eine Punktprobe machen

$$g : y = 3x + 1$$

Q(2|7) einsetzen

$$7 = 3 \cdot 2 + 1$$

⇒

wahre Aussage

⇒

Q liegt auf g

Die Gerade h geht durch die beiden Scheitelpunkte. Den Scheitelpunkt S_2 haben wir bereits. Den Scheitelpunkt S_1 müssen wir noch berechnen.

Diesen berechnet man über die Nullstelle der Ableitung.

$$p_1: y = x^2 + 4x - 5 \Rightarrow y' = 2x + 4. \text{ Aus } y' = 0 \text{ folgt } 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$y\text{-Wert: } x = -2 \text{ in } p_1. \quad y = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 5 = 4 - 8 - 5 \Rightarrow S_1(-2 | -9).$$

Nun kennen wir zwei Punkte, durch die die Gerade h verläuft.

$S_1(-2 | -9)$ und $S_2(5 | -2)$ in die ZPF einsetzen.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad S_1 \text{ und } S_2 \text{ einsetzen}$$

$$\frac{-2 - (-9)}{5 - (-2)} = \frac{y - (-9)}{x - (-2)} \quad \text{zusammenrechnen}$$

$$\frac{7}{7} = \frac{y+9}{x+2} \quad \text{links vereinfachen, danach } | \cdot (x+2)$$

$$1 \cdot (x+2) = y+9 \quad | -9$$

$$x-7 = y \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{h : y = x - 7}$$

Lösung von W2 b) (von Seite 6)

Bemerkung: Wenn Sie die Aufgabe W2b) aufmerksam durchlesen, werden Sie merken, dass erst einmal überhaupt keine Frage auftaucht. Die Frage bzw. Aufgabenstellung gibt es erst in der allerletzten Zeile. Dann aber alles zu durchschauen, also was man genau für den Flächeninhalt des Rechtecks braucht ist etwas schwierig. Wir gehen daher so vor: Wir bestimmen zuerst die Gleichung der Parabel p, danach die Gleichung der Geraden g [auch wenn diese nicht direkt gefragt sind], dann schneiden wir p und g [um die Schnittpunkte A und C zu erhalten], und danach denken wir weiter.

Bestimmung der Parabel p:

Wir haben zwei Punkte der Parabel gegeben, die setzen wir ein.

Zuerst den Scheitelpunkt: [Normalerweise heißt es immer, dass man bei gegebenem Scheitelpunkt die Scheitelform einer Parabel verwenden soll. Das würde hier zwar schon gehen, wird aber nicht viel besser als normales Einsetzen.]

$$S(0 | -4,5) \text{ in } p: \Rightarrow -4,5 = a \cdot 0^2 + c \Rightarrow -4,5 = 0 + c \Rightarrow c = -4,5$$

$$c = -4,5 \text{ und } P(-3 | 0) \text{ in } p: \Rightarrow 0 = a \cdot 3^2 - 4,5 \Rightarrow 0 = 9a - 4,5$$

$$\Rightarrow a = 4,5 / 9 = 0,5 \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{p : y = 0,5x^2 - 4,5}$$

Bestimmung der Geradengleichung von g:

Wir haben die Steigung und einen Punkt von g gegeben, wir könnten also die PSF verwenden.

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad m = 1,5 \text{ und } R(0 | 0,5) \text{ einsetzen}$$

$$1,5 = \frac{y - 0,5}{x - 0} \quad | \cdot x \quad [\text{beachte: „}x-0\text{“} = \text{„}x\text{“}]$$

$$1,5 \cdot x = y - 0,5 \quad | + 0,5$$

$$1,5 \cdot x + 0,5 = y \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{g : y = 1,5x + 0,5}$$

Bestimmung der Schnittpunkte A und C:

$$p = g \quad 0,5x^2 - 4,5 = 1,5x + 0,5 \quad | -1,5x - 0,5$$

$$0,5x^2 - 1,5x - 5 = 0$$

(p-q-Formel)

(a-b-c-Formel)

$$0,5x^2 - 1,5x - 5 = 0 \quad | : 0,5$$

$$x_{1,2} = \frac{+1,5 \pm \sqrt{1,5^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot (-5)}}{2 \cdot 0,5} = \frac{1,5 \pm \sqrt{2,25 + 10}}{1}$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Sie sollten natürlich nur den Weg entweder über p-q-Formel oder über a-b-c-Formel rechnen.

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (-10)} = 1,5 \pm \sqrt{12,25}$$

$$= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{10}{1}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{40}{4}} = 1,5 \pm 3,5$$

$$= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = -2$$

$$y\text{-Werte: } x=5 \text{ in } g \text{ [oder p]: } y = 1,5 \cdot 5 + 0,5 = 8 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A(5 | 8)}$$

$$x=-2 \text{ in } g \text{ [oder p]: } y = 1,5 \cdot (-2) + 0,5 = -2,5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C(-2 | -2,5)}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A(5 | 8)}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{C(-2 | -2,5)}$$

Flächeninhalt des Rechtecks:

Wenn man sich nun die Punkte A und C in eine Skizze einträgt [wie rechts] und bedenkt, dass das Rechteck achsenparallel sein soll, kann es nur eine mögliche Lage für das Rechteck geben [A und C sollen ja Eckpunkte des Rechtecks sein].

Die Breite des Rechtecks ist 7

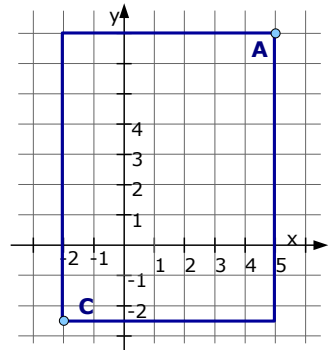
$$[x\text{-Wert von A ist 5, } y\text{-Wert von C ist -2. } 5 - (-2) = 7]$$

Die Höhe des Rechtecks ist 10,5

$$[y\text{-Wert von A ist 8, } y\text{-Wert von C ist -2,5. } 8 - (-2,5) = 10,5]$$

Das Rechteck hat demnach eine Fläche von

$$A = 7 \cdot 10,5 = 73,5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A_{\text{Rechteck}} = 73,5}$$



Lösung von W3 a) (von Seite 7)

Die Tangente t_1 an K_f in B_1 :

Den y -Wert von B_1 kann man aus der Wertetabelle von P5 ablesen, so dass man einen Punkt komplett gegeben hat [$B_1(2|3)$], die Steigung erhalten wir über die erste Ableitung [siehe P5].

$$m_1 = f'(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Den Rest der Tangentengleichung bestimmen wir mit der PSF [brauchen wir erst viel später].

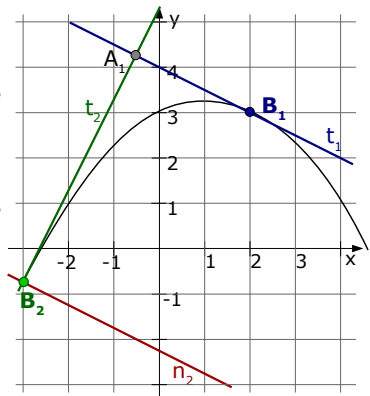
$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad m_1 \text{ und } B_1 \text{ einsetzen}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{y - 3}{x - 2} \quad | \cdot (x - 2)$$

$$-\frac{1}{2} \cdot (x - 2) = y - 3 \quad \text{ausrechnen}$$

$$-\frac{1}{2}x + 1 = y - 3 \quad | +3$$

$$-\frac{1}{2}x + 4 = y \quad \Rightarrow$$



$$\underline{t_1 : y = -\frac{1}{2}x + 4}$$

Die Tangente t_2 steht senkrecht auf an t_1 ,

die Steigung von t_2 ist daher der negative Kehrwert von t_1 .

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = +2$$

Um die Gleichung der Tangente t_2 zu bestimmen, brauchen wir den Berührungspunkt. Dafür verwenden wir die Idee, dass eine Tangentensteigung die erste Ableitung ist

(1). Wir setzen also die Steigung der Tangente t_2 gleich der Ableitung und siehe da... wir erhalten einen x-Wert, welches der x-Wert des Berührungspunktes ist.

$$m_2 = f'(x) \Rightarrow 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x \Rightarrow -3 = x$$

Den y-Wert entnehmen wir der Wertetabelle aus Aufgabe P5. $y = -0,75 \Rightarrow$

$$B_2(-3 | -0,75)$$

Die Gleichung bestimmen wir mit der PSF.

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

m_2 und B_2 einsetzen

$$2 = \frac{y - (-0,75)}{x - (-3)}$$

vereinfachen

$$2 = \frac{y + 0,75}{x + 3}$$

$$| \cdot (x + 3)$$

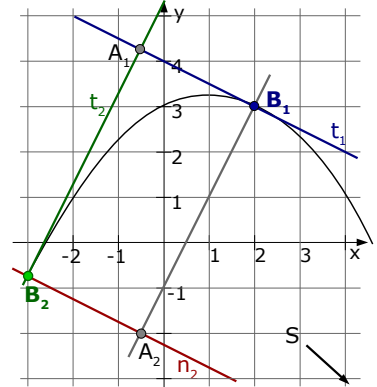
$$2 \cdot (x + 3) = y + 0,75$$

$$2x + 6 = y + 0,75$$

$$| - 0,75$$

$$2x + 5,25 = y$$

$$\Rightarrow$$



$$t_2 : y = 2x + 5,25$$

Die Gerade n_2 steht senkrecht auf t_2 ,

[und da t_2 senkrecht auf t_1 steht] muss n_2 parallel zu t_1 sein, hat also die gleiche Steigung $\Rightarrow n_2$ hat die Steigung $m = -1/2$. Ein Punkt von n_2 ist B_2 , daher können wir die PSF anwenden.

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$m_1 = -1/2$ und B_2 einsetzen

$$-\frac{1}{2} = \frac{y - (-0,75)}{x - (-3)}$$

vereinfachen

$$-\frac{1}{2} = \frac{y + 0,75}{x + 3}$$

$$| \cdot (x + 3)$$

$$-\frac{1}{2} \cdot (x + 3) = y + 0,75$$

ausrechnen

$$-\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = y + 0,75$$

[wir haben in der Gleichung Brüche *und* Kommazahlen. Das ist nicht so schön. Man sollte entweder Alles in Brüchen oder Alles in Kommazahlen angeben.]

$$-0,5x - 1,5 = y + 0,75$$

$$| - 0,75$$

$$-0,5x - 2,25 = y$$

$$\Rightarrow$$

$$n_2 : y = -0,5x - 2,25$$

Der Schnittpunkt S ist der Schnittpunkt von der Gerade n_2 mit der Funktion f . \Rightarrow Gleichsetzen!

$$n_2 = f(x)$$

$$-0,5x - 2,25 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 \quad | \cdot 4$$

$$-2x - 9 = -x^2 + 2x + 12 \quad | +x^2 - 2x - 12$$

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

(p-q-Formel)

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - (-21)}$$

$$= 2 \pm \sqrt{4 + 21}$$

$$= 2 \pm 5$$

$$x_1 = 7 \quad x_2 = -3$$

(a-b-c-Formel)

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 10}{2}$$

- 1 Eigentlich ist die Tangentensteigung nicht die Ableitung. Erst wenn man für's „x“ der Ableitung den x-Wert des Berührungspunktes einsetzt, erhält man eine Zahl, welches dann die Steigung ist.

y-Werte: $x=7$ in n_2 [oder f]: $y=-0,5 \cdot 7 - 2,25 = -5,75 \Rightarrow S(7|-5,25)$
 $x=-3$ liefert den Punkt B_2 und ist daher unwichtig.

Die fehlenden Eckpunkte A_1 und A_2 des Rechtecks:

A_1 ist der Schnittpunkt von t_1 mit t_2 :

$$t_1 = t_2$$

$$-\frac{1}{2}x + 4 = 2x + 5,25 \quad | \cdot 2$$

$$-x + 8 = 4x + 10,5 \quad | +x - 10,5$$

$$-2,5 = 5x \quad | : 5$$

$$-0,5 = x$$

y-Wert: $x=0,5$ in t_2 : $y=2 \cdot (-0,5) + 5,25 = 4,25 \Rightarrow A_1(-0,5|4,25)$

A_2 könnte man als Schnittpunkt der Geraden B_1A_2 und A_2B_2 berechnen. Wir haben aber noch nicht einmal die Gleichung der Gerade B_1A_2 , das wird also umständlich.

Einfacher ist es, A_2 über die umgekehrte Mittelpunktsformel zu bestimmen. Zuerst bestimmen wir den Mittelpunkt M des Rechtecks als Mittelpunkt von B_1 und B_2 .

x-Wert: $x_M = \frac{x_{B_1} + x_{B_2}}{2} = \frac{2 + (-3)}{2} = -0,5$

y-Wert: $y_M = \frac{y_{B_1} + y_{B_2}}{2} = \frac{3 + (-0,75)}{2} = 1,125 \Rightarrow M(-0,5|1,125)$

Da M gleichzeitig auch die Mitte von A_1 und A_2 ist, gilt:

x-Wert: $x_M = \frac{x_{A_1} + x_{A_2}}{2} \Rightarrow 2 \cdot x_M = x_{A_1} + x_{A_2}$
 $\Rightarrow x_{A_2} = 2 \cdot x_M - x_{A_1} = 2 \cdot (-0,5) - (-0,5) = -0,5$

y-Wert: $y_M = \frac{y_{A_1} + y_{A_2}}{2} \Rightarrow 2 \cdot y_M = y_{A_1} + y_{A_2}$
 $\Rightarrow y_{A_2} = 2 \cdot y_M - y_{A_1} = 2 \cdot 1,125 - 4,25 = -2 \Rightarrow A_2(-0,5|-2)$

Lösung von W4 a) (von Seite 7)

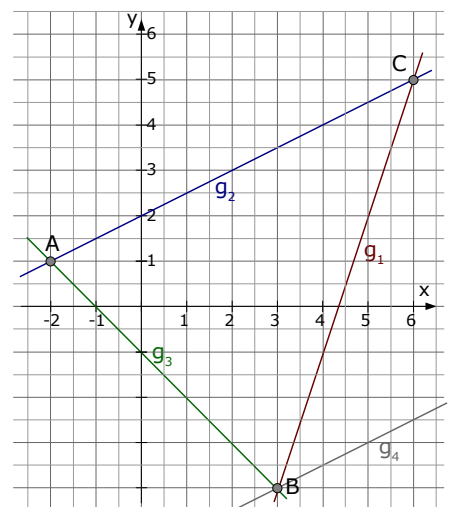
a) Die Gleichung der Gerade g_4 erhält man, wenn man sich Folgendes überlegt:

Im Dreieck ABC denkt man sich AC als Grundlinie. Die Höhe des Dreiecks ist damit der Abstand von B zur Strecke AC .

Den Flächeninhalt des Dreiecks ABC , der gleich bleiben soll, berechnet man über $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.

Da der Flächeninhalt A unverändert bleiben soll und sich die Grundlinie AC auch nicht ändert, kann sich die Höhe des Dreiecks ebenfalls nicht ändern.

Das heißt: der Punkt B muss sich auf einer Gerade bewegen, die parallel zu AC ist. \Rightarrow Die Gerade g_4 , auf der sich B bewegt, ist daher parallel zu AC und geht durch B .



Wir bestimmen sie mit der PSF, $m_4=m_{AC}=\frac{1}{2}$ und der Punkt ist B(3|-4).

$$\frac{1}{2} = \frac{y-(-4)}{x-3} \quad | \cdot (x-3), \text{ oben noch zusammenfassen}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (x-3) = y+4 \quad \text{Klammer auflösen}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = y+4 \quad | -4$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{11}{2} = y \quad \Rightarrow$$

$$\underline{g_4 : y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{2}}$$

Der **Umkreismittelpunkt** ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.

Wir können beispielsweise die Mittelsenkrechte auf AC und die auf AB wählen und den Schnittpunkt beider berechnen.

Mittelsenkrechte auf AC:

Der Mittelpunkt von AC ist:

$$M_{AC} \left(\frac{(-2)+6}{2} \mid \frac{1+5}{2} \right) = M_{AC}(2 \mid 3)$$

Die Steigung der Mittelsenkrechten ist $m=-2$ [negativer Kehrwert von AC]

PSF anwenden

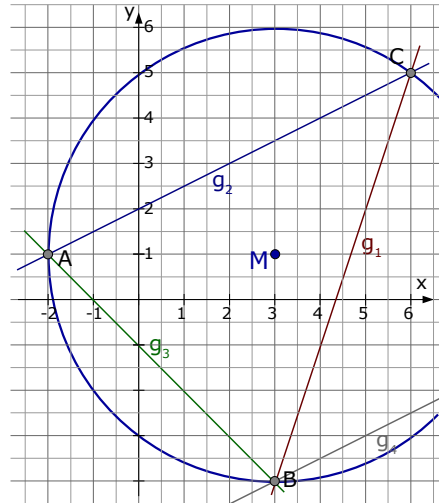
$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1} \quad M_{AC} \text{ und } m=-2 \text{ einsetzen}$$

$$-2 = \frac{y-3}{x-2} \quad | \cdot (x-2)$$

$$-2 \cdot (x-2) = y-3 \quad \text{Klammern auflösen}$$

$$-2x+4 = y-3 \quad | +3$$

$$-2x+7 = y \quad \Rightarrow \quad \text{Mittelsenkrechte : } y = -2x+7$$



Mittelsenkrechte auf AB:

Der Mittelpunkt von AB ist:

$$M_{AB} \left(\frac{(-2)+3}{2} \mid \frac{1+(-4)}{2} \right) = M_{AB}(0,5 \mid -1,5)$$

Die Steigung der Mittelsenkrechten ist $m=1$

[negativer Kehrwert von AB, welches die Gerade g_3 war und die Steigung $m_3=-1$ hatte]

PSF anwenden

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1} \quad M_{AB} \text{ und } m=1 \text{ einsetzen}$$

$$1 = \frac{y-(-1,5)}{x-0,5} \quad | \cdot (x-0,5), \text{ oben vereinfachen}$$

$$1 \cdot (x-0,5) = y+1,5 \quad \text{Klammern auflösen}$$

$$x-0,5 = y+1,5 \quad | -1,5$$

$$x-2 = y \quad \Rightarrow \quad \text{Mittelsenkrechte : } y = x-2$$

Der Schnittpunkt beider Mittelsenkrechten ist der Umkreismittelpunkt.

$$\begin{aligned} -2x+7 &= x-2 & | -x-7 \\ -3x &= -9 & \Rightarrow \quad x = 3 \end{aligned}$$

Den y-Wert erreicht man durch Einsetzen von $x=3$ in eine der Geradengleichungen: $y = -2 \cdot 3 + 7 = 1$

Der **Umkreismittelpunkt** lautet \Rightarrow **M(3|1)**

Der Umkreisradius ist der Abstand von M zu A [oder Abstand von M zu B, ...]

$$r = d(M,A) = \sqrt{(x_M-x_A)^2 + (y_M-y_A)^2} = \sqrt{(3-(-2))^2 + (1-1)^2} = \sqrt{25+0} = 5$$

Der **Umkreisradius** hat die Länge von

$$\mathbf{r = 5}$$

Eine gute Methode ist, den Abstand von $M(3|1)$ zu P , zu R und Q zu bestimmen. Wenn der jeweils 5 ist, liegen P , Q und R auf dem vorher bestimmten Umkreis, damit haben dann A , B , C und P , Q , R den gleichen Umkreis.

$$d(M,P) = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} = \sqrt{(3-3)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{0+25} = 5$$

$$d(M,Q) = \sqrt{(x_M - x_Q)^2 + (y_M - y_Q)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$d(M,R) = \sqrt{(x_M - x_R)^2 + (y_M - y_R)^2} = \sqrt{(3-(-1))^2 + (1-4)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

Jipieh! **M ist der Umkreismittelpunkt von ABC und von PQR!**