Zusammenfassung der Analysis

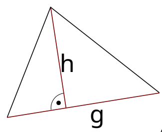
Sie sollten folgende wichtige Themen beherrschen:

Der Eintrag in eckigen Klammern hinter den Kapitelnamen gibt die Kap.Nr. des Themas im Buch „Grundlagen der Analysis" bzw. auf der **www.Mathe-Seite.de** wieder!

1 Flächengeometrie:

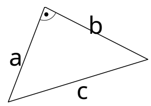
1.1 Dreieck:

Fläche des Dreiecks: $\mathbf{A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h}$



Umfang des Dreiecks: $U = a+b+c$

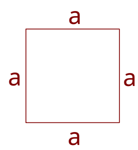
Fläche im rechtwinkligen Dreieck: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$



1.2 Quadrat:

Fläche des Quadrats: $\mathbf{A = a^2}$

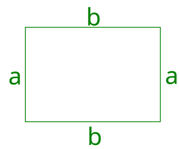
Umfang des Quadrats: $U = 4 \cdot a$



1.3 Rechteck:

Fläche des Rechtecks: $\mathbf{A = a^2}$

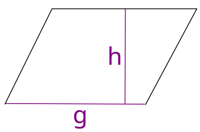
Umfang des Rechtecks: $U=2a+2b$



1.4 Parallelogramm:

Fläche des Parallelogramms: $A = g \cdot h$

Umfang: Alle 4 Seiten zusammenzählen

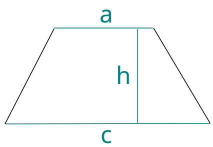


1.5 Trapez:

Fläche vom Trapez: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$

(a und c sind die parallelen Grundlinien)

Umfang: Alle 4 Seiten zusammenzählen



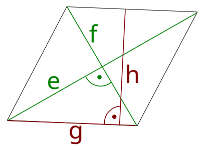
1.6 Drachenviereck:

Fläche vom Drachenviereck: $A = g \cdot h$

besser ist meist: $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$

(e und f sind die Diagonalen)

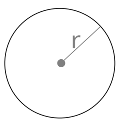
Umfang: Alle 4 Seiten zusammenzählen



1.7 Kreis:

Kreisfläche: $\mathbf{A = \pi \cdot r^2}$

Kreisumfang: $\mathbf{U = 2 \cdot \pi \cdot r}$



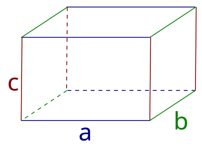
2 Raumgeometrie:

2.1 Quader:

Volumen eines Quaders: **$V = a \cdot b \cdot c$**

Oberfläche des Quaders: $O = 2ab + 2ac + 2bc$

(Alle sechs seitlichen Rechtecke zusammenzählen)



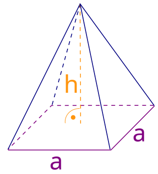
2.2 Pyramide:

Volumen einer beliebigen Pyramide: $\mathbf{V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h}$

(G ist die beliebige Grundfläche, h ist die Pyramidenhöhe)

Volumen einer quadratischen Pyramide: $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

(a = Seitenlänge der Grundfläche, h = Pyramidenhöhe)



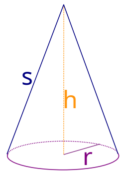
2.3 Kegel:

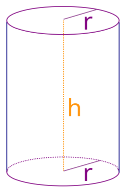
Volumen des Kegels: $\mathbf{V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h}$

Mantelfläche des Kegels: $M = \pi \cdot r \cdot s$

Oberfläche des Kegels: $O = \pi \cdot r \cdot (r+s)$

(r = Radius, h = Höhe, s = Seitenlinie des Kegels.
Es gilt: $r^2+h^2=s^2$)





2.4 Zylinder:

Volumen des Zylinders: $\mathbf{V = \pi \cdot r^2 \cdot h}$

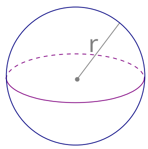
Mantelfläche des Zylinders: $M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

Oberfläche des Zylinders: $O = 2\pi \cdot r \cdot (r+h)$

2.5 Kugel:

Volumen der Kugel: $\mathbf{V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}$

Oberfläche der Kugel: $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

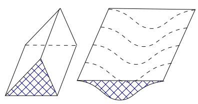


2.6 Prisma:

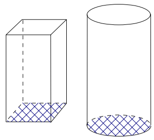
(ein Prisma ist ein Körper, der oben
und unten die gleiche Fläche hat)

$V = G \cdot h$

(Volumen = Grundfläche mal Höhe)



(liegende Prismen)

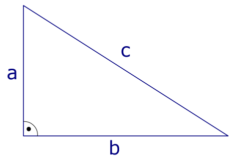


(stehende Prismen)

3 Trigonometrie:

3.1 Pythagoras: $a^2+b^2 = c^2$

(„c“ ist hierbei immer die Hypothenuse,
liegt also immer gegenüber vom rechten Winkel).



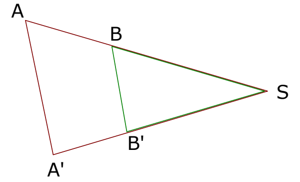
3.2 Strahlensatz:

$$\frac{BS}{AS} = \frac{B'S}{A'S} = \frac{BB'}{AA'}$$

(immer kurze Seiten durch langen Seiten
[auch lang durch kurz ist möglich])

Der Strahlensatz beschreibt, was passiert, wenn man ein Dreieck ABS vergrößert oder verkleinert.
Alle Seiten vergrößern (oder verkleinern) sich um den gleichen Faktor: den Vergrößerungsfaktor!

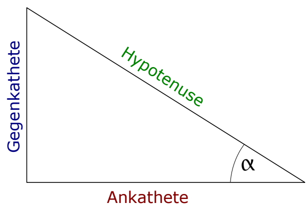
Die Seiten AB und A'B' sind immer parallel!



3.3 Sinus, Kosinus, Tangens:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \qquad \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$



mathe-seite.de

4 Zahlenmengen:

Die Zahlenmengen:

$\mathbb{N}$: Natürliche Zahlen (also 1,2,3,4,5,6,...) [ohne die 0 !!!]
$\mathbb{Z}$: Ganze Zahlen, d.h. alle positiven und negativen Zahlen (mit 0 !!)
(also .... -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...)
$\mathbb{Q}$: Rationale Zahlen (also alle Bruchzahlen [und auch alle ganzen Zahlen]). Die einzigen Zahlen, die nicht drin sind, sind Wurzeln und Zahlen die, zwar unendlich lang sind aber nicht periodisch (z.Bsp π oder e).
I: Irrationale Zahlen. Alle Zahlen, die nicht rational sind. Also Wurzeln und π und e und ähnliches Zeug. Diese Zahlenmenge ist verhältmäßig unwichtig.
$\mathbb{R}$: Reelle Zahlen. Alle Zahlen.
(Einschließlich Wurzeln und unendlich langen, nicht periodischen Zahlen)

Das Zeichen * bezieht sich immer auf die Zahl 0. Bei $\mathbb{N}$ kommt sie dazu, bei allen anderen wird sie rausgenommen.

$\mathbb{N}^*$ oder $\mathbb{N}_0$ die natürlichen Zahlen MIT 0 (also: 0,1,2,3,4,…)
$\mathbb{Z}^*$ oder $\mathbb{Z}_0$: die ganzen Zahlen ohne die 0 (also: -3,-2,-1,1,2,3,…)
$\mathbb{Q}^*$ oder $\mathbb{Q}_0$: die rationalen Zahlen ohne 0 (also alle ganzen und alle Bruchzahlen ohne die 0)
$\mathbb{R}^*$ oder $\mathbb{R}_0$: die reellen Zahlen, also ALLE Zahlen außer der Null.

Jetzt gibt´s bei den Mengen noch den Zusatz mit den Vorzeichen:

$\mathbb{Z}^+$: alle positiven, ganzen Zahlen (also 1,2,3,4,5,...) [ohne 0 !!]
(das sind genau die natürlichen Zahlen, deswegen verwendet man Z^+ nicht)
$\mathbb{Z}^-$: alle negativen, ganzen Zahlen (also ...,-4,-3,-2,-1) [ohne 0 !!]
$\mathbb{Q}^+$: alle positiven Bruchzahlen [ohne 0 !!]
$\mathbb{Q}^-$: alle negativen Bruchzahlen [ohne 0 !!]
$\mathbb{R}^+$: alle positiven Zahlen [ohne 0 !!]
$\mathbb{R}^-$: alle negativen Zahlen [ohne 0 !!]

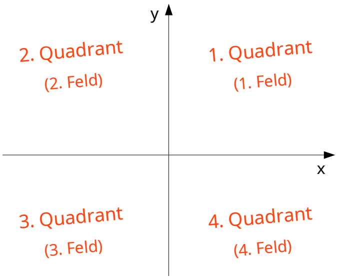
Will man die Null mit dabei haben, setzt man noch zusätzlich das Sternchen.
z.B. bedeutet dann Q^+_* oder Q^+_0: alle positiven Bruchzahlen MIT 0.

5. Koordinatengeometrie:

Die vier Quadranten:

Die x- und die y-Achse teilen die Ebene in vier sogenannte Quadranten (oder auch vier Felder).

Der erste Quadrant ist rechts oben, danach zählt man gegen den Uhrzeiger weiter.



5.1 Punkte:

Abstand zweier Punkte:

Man verwendet die Abstandsformel (oder auch Entfernungsformel). Den Abstand zweier Punkte $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$, berechnet man mit:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Mittelpunkt einer Strecke:

Der Mittelpunkt von zwei Punkten $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ ist:

$$M_{AB} = \left(\frac{x_A + x_B}{2} \middle| \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

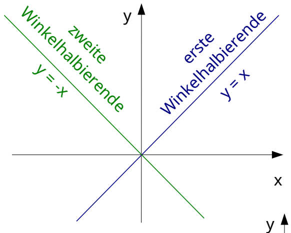
5.2 Geraden:

Steigung einer Gerade bei zwei gegebenen Punkten: $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

Die beiden Winkelhalbierenden:

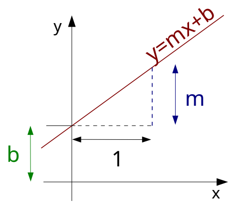
1. erste Winkelhalbierende: **$y = x$**
2. zweite Winkelhalbierende: **$y = -x$**



Gerade einzeichnen: **$y = m \cdot x + b$**

Den y-Achsenabschnitt „b" auf der y-Achse eintragen. (Hier „beginnt" die Gerade)

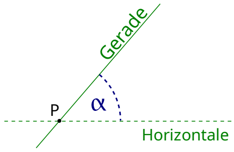
Vom eingezeichneten y-Achsenabschnitt die Steigung eintragen, also eins nach rechts gehen und dann um „m" (je nach Vorzeichen) nach oben oder unten gehen.



Winkel:

Winkel zwischen einer Geraden [z.B. Tangente] und Horizontalen [heißt auch Steigungswinkel]:

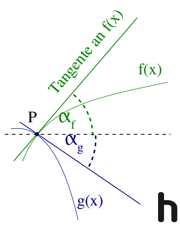
$$\mathbf{m = \tan(\alpha)}$$



Hierbei ist m die Steigung. Bei Funktionen ist m damit die Tangentensteigung und wird über die Ableitung berechnet. $m = f'(x_0)$

Benötigt man den Schnittwinkel zwischen zwei Funktion (oder zwei Geraden), berechnet man die Steigungswinkel beider Funktionen und zählt beide Winkel zusammen (oder zieht sie voneinander ab).

$$\alpha_{ges} = \alpha_f + \alpha_g$$



6. Funktionen:

6.1 Bedeutung von f(x), f'(x), ...

[

f'(x): Die erste Ableitung einer Funktion ist ihre **Steigung**: [→A.11.02]
Es ist die Steigung der Funktion, gleichzeitig Steigung der Tangenten und bei anwendungsorientierten Aufgaben ist es die **Änderung** (d.h. Zunahme oder Abnahme).

f'(x) gibt auch das **Monotonieverhalten** an.
für $f'(x)<0$ ist f(x) streng monoton fallend,
für $f'(x)\leqslant 0$ ist f(x) monoton fallend,
für $f'(x)>0$ ist f(x) streng monoton steigend,
für $f'(x)\geqslant 0$ ist f(x) monoton steigend.
Grenzen der Monotoniebereiche sind Hoch- und Tiefpunkte.

f'(x) ist auch die momentane Änderungsrate.

f''(x): Die zweite Ableitung einer Funktion ist ihre **Krümmung**: [→A.11.03]
für $f''(x)<0$ ist f(x) rechtsgekrümmt,
für $f''(x)>0$ ist f(x) linksgekrümmt.

F(x): Die Stammfunktion einer Funktion braucht man für die **Fläche**: [→A.11.04]
Um die Fläche zwischen einer Funktion und der x-Achse zu bestimmen, bildet man die Stammfunktion, setzt da linke und rechte Flächengrenzen ein und zieht beide voneinander ab. Diesen Prozess nennt man integrieren.

Bei anwendungsorientierten Aufgaben ist F(x) die Gesamtsumme aller Werte, die durch f(x) angegeben werden.

Die **momentane Änderungsrate** ist die Steigung einer Funktion. [→A.11.02]
Es ist nur *ein* Punkt gegeben, dessen x-Wert in f'(x) eingesetzt wird.

Die **mittlere Änderungsrate** oder **durchschnittliche Änderungsrate** ist die Steigung zwischen *zwei* Kurvenpunkten P(a|f(a)) und Q(b|f(b)).
Man berechnet sie mithilfe von $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ bzw $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

6.2 Monotonie- und Krümmungsverhalten: [→A.11.07, →A.11.08]

Die **Monotonie** einer Funktion umfasst die Fälle „monoton steigend", wenn die Steigung/Ableitung der Funktion positiv ist und „monoton fallend" wenn die Steigung/Ableitung der Funktion negativ ist.
Für die Monotonie braucht man die erste Ableitung der Funktion.

→ Man setzt $f'(x)=0$ und berechnet die x-Werte, z.B. x_1 und x_2. (oder mehrere)
→ Diese x-Werte sind Intervallgrenzen, d.h man erhält automatisch die Intervalle $I_1=(-\infty;x_1)$ $I_2=(x_1;x_2)$ $I_3=(x_2;\infty)$
→ Aus jedem dieser Intervalle setzt man irgend einen x-Wert wieder in f'(x) ein und betrachtet das Vorzeichen. Ist das Vorzeichen positiv, ist f'(x) in diesem Intervall monoton steigend, ist das Vorzeichen negativ, ist f'(x) in diesem

Intervall monoton fallend.

Die **Krümmung** einer Funktion umfasst die Fälle „Linkskrümmung“ bzw. „Linkskurve“ wenn die zweite Ableitung der Funktion positiv ist und „Rechtskrümmung“ bzw. „Rechtskurve“ wenn die zweite Ableitung der Funktion negativ ist.

Für das Krümmungsverhalten braucht man die zweite Ableitung der Funktion.

→ Man setzt $f''(x)=0$ und berechnet die x-Werte, z.B. x_1 und x_2. (oder mehrere)

→ Diese x-Werte sind Intervallgrenzen, d.h man erhält automatisch die Intervalle $I_1=(-\infty;x_1)$ $I_2=(x_1;x_2)$ $I_3=(x_2;\infty)$

→ Aus jedem dieser Intervalle setzt man irgend einen x-Wert wieder in $f''(x)$ ein und betrachtet das Vorzeichen. Ist das Vorzeichen positiv, ist $f''(x)$ in diesem Intervall linksgekrümmt, ist das Vorzeichen negativ, ist $f''(x)$ in diesem Intervall rechtsgekrümmt.

6.3 Definitions- und Wertemenge: [→A.11.05, →A.11.06]

Die Definitionsmenge beinhaltet alle x-Werte, die eine Funktion annehmen kann, also alle x-Werte die man in eine Funktion einsetzen darf. In der Regel gilt: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$, es gibt nur 3 Ausnahmen:

→ bei Brüchen darf der Nenner nicht Null werden

→ bei Wurzeln darf unter der Wurzel nichts Negatives stehen

→ bei Logarithmen muss das Argument positiv sein. (nur L.K.!)

Die Wertemenge beinhaltet alle y-Werte, die eine Funktion annehmen kann, also alle y-Werte die rauskommen können. Man braucht dafür leider eine Skizze der Funktion und überlegt sich $\mathbb{W}$ anhand Extrempunkten und Asymptoten. Im Normalfall ist die Wertemenge also arbeitsaufwendig, daher müssen Sie vermutlich also nur „einfache“ Funktionen bearbeiten.

6.4 Ableitungen und Integrale: [→A.13]

$f(x)$	$f'(x)$
$a\cdot x^n$	$a\cdot n\cdot x^{n-1}$
$\frac{a}{x^n}$	$-\frac{a\cdot n}{x^{n+1}}$
$a\cdot\sqrt{n}$	$\frac{a}{2\sqrt{n}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$e^{k\cdot x}$	$k\cdot e^{k\cdot x}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Grafischer Zusammenhang zwischen f(x) und f'(x)

f(x)	f'(x)
N	--
H	$N_{+\to-}$
T	$N_{-\to+}$
SP	$N_{+\to+}$ / $N_{-\to-}$
W	H / T
--	W

Ableitungsregeln

Produktregel:

$f(x) = u \cdot v \;\Rightarrow\; f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

Quotientenregel:

$f(x) = \frac{u}{v} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Kettenregel:

$f(x) = u(v(x)) \;\Rightarrow\; f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

N = Nullstelle
$N_{+\to-}$ = Nullstelle mit VZW von Plus nach Minus.
$N_{-\to+}$ = Nullstelle mit VZW von Plus nach Minus.
$N_{+\to+}$ / $N_{-\to-}$ = Nst. ohne VZW (also H oder T auf x-Achse)
H = Hochpunkt
T = Tiefpunkt
W = Wendepunkt
SP = Sattelpunkt

6.5 Berühren und Orthogonalität: [→A.22.01]

stehen zwei Geraden aufeinander **senkrecht** (=orthogonal) gilt:

①: $m_g \cdot m_h = -1$ und ②: $y_g = y_h$

schneiden sich zwei Funktionen f(x) und g(x) in S(a|b) **senkrecht**, gilt:

①: $f'(a) \cdot g'(a) = -1$ und ②: $f(a) = g(a)$

berühren sich zwei Funktionen f(x) und g(x) in B(a|b), gilt:

①: $f'(a) = g'(a)$ und ②: $f(a) = g(a)$

6.6 Tangenten und Normale: [→A.15]

Steigung einer Tangente an eine Funktion f(x) in einem gegebenen Punkt B(u|f(u)) $\quad m_{Tan} = f'(u)$

Steigung einer Normale an eine Funktion f(x) in einem gegebenen Punkt B(u|f(u)) $\quad m_{Nor} = \frac{-1}{m_{Tan}} = \frac{-1}{f'(u)}$

Gleichung einer **Tangente** an eine Funktion f(x) mit dem Berührpunkt B(u|f(u))

$y_{Tan} = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$

oder einfach mit

$y = m \cdot x + b$

Gleichung einer **Normale** an eine Funktion f(x) mit dem Berührpunkt B(u|f(u))

$y_{Nor} = \frac{-1}{f'(u)} \cdot (x-u) + f(u)$

oder einfach mit

$y = m \cdot x + b$

6.7 Gleichungen lösen: [→A.12]

Falls in der Gleichung die Variable „x" ein einziges Mal auftaucht, löst man einfach nach dieser auf.

Anderenfalls gibt es drei Techniken, um Gleichungen zu lösen:

→ Ausklammern mit anschließendem Satz vom Nullprodukt,
→ p-q-Formel bzw. a-b-c-Formel (heißt auch Mitternachtsformel)
→ Substitution

p-q-Formel: [→A.12.04]

$x^2 + px + q = 0$

a-b-c-Formel: [→A.12.05]

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad\qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

6.8 Kurvendiskussion: [→A.19]
Nullstellen: f(x)=0

Extrempunkte: f'(x)=0
x-Werte in f(x) einsetzen, um y-Werte zu erhalten.
x-Werte in f''(x) einsetzen. Falls Ergebnis negativ ist, handelt es sich um einen HP. Falls Ergebnis positiv ist, ist es ein TP.

Wendepunkte: f''(x)=0
x-Werte in f(x) einsetzen, um y-Werte zu erhalten.
x-Werte in f'''(x) einsetzen. Falls Ergebnis nicht Null ist, handelt es sich um einen WP.

6.9 Symmetrie: [→A.17.01, →A.17.02]

Regel für **Symmetrie** zum Ursprung: f(-x) = -f(x)

Regel für **Symmetrie** zur y-Achse: f(-x) = f(x)

Bei ganzrationalen Funktionen (d.h. Polynome) gilt die Regel:
tauchen NUR gerade Hochzahlen auf, ist f(x) achsensymmetrisch,
tauchen NUR ungerade Hochzahlen auf, ist f(x) punktsymmetrisch,
gibt es gemischte Hochzahlen, ist f(x) nicht symmetrisch.

6.10 Strecken, Verschieben, Spiegeln: [→A.23.01–A.23.03]

Verschieben einer Funktion um „a" nach rechts: f(x) → f(x−a)
Verschieben einer Funktion um „a" nach links: f(x) → f(x+a)
Verschieben einer Funktion um „b" nach oben: f(x) → f(x)+b
Verschieben einer Funktion um „b" nach unten: f(x) → f(x)−b
Spiegeln einer Funktion an x-Achse: f(x) → -f(x)
Spiegeln einer Funktion an y-Achse: f(x) → f(-x)
Strecken einer Funktion um „c" in x-Richtung: $f(x) \to f\left(\frac{1}{c}\cdot x\right)$
Strecken einer Funktion um „c" in y-Richtung: f(x) → c·f(x)

6.11 Trigonometrische Funktionen: [→A.42.08]

$f(x)=a\cdot\sin(b(x-c))+d$ bzw. $f(x)=a\cdot\cos(b(x-c))+d$

a = Amplitude, Streckung in y-Richtung

b : Periode ist $\frac{2\pi}{b}$. Streckfaktor in x-Richtung ist $\frac{1}{b}$.

c = Verschiebung in x-Richtung. Bei sin-Funktionen ist c der x-Wert des Wendepunktes mit pos. Steigung. Bei cos-Funktionen ist c der x-Wert des Hochpunktes.

d = Verschiebung in y-Richtung, auch Mittellinie.

Alle HP haben den y-Wert $y_H=d+a$, alle Tiefpunkte den y-Wert $y_T=d-a$.

---

7 Integrale:

7.1 **Fläche** zwischen Funktion und x-Achse: [→A.18.02]

$$A = \left|\int_{\text{linke Grenze}}^{\text{rechte Grenze}} f(x)\,dx\right| = \left|\left[\text{Stammfunktion}\right]_{\text{linke Grenze}}^{\text{rechte Grenze}}\right| =$$

= | [rechte x-Grenze eingesetzt]−[linke x-Grenze eingesetzt] | = ...

7.2 **Fläche** zwischen zwei Kurven: [→A.18.03]

$$A = \left|\int_{\text{linke Grenze}}^{\text{rechte Grenze}} (\text{obere Kurve})-(\text{untere Kurve})\,dx\right| = \ldots$$

7.3 **Mittelwert** einer Funktion: (auch durchschnittlicher y-Wert) [→A.18.07]

Der Mittelwert bzw. durchschnittlichen y-Wert einer Funktion innerhalb der linken Grenze $x_1=a$ und der rechten Grenze $x_2=b$ berechnet man mit:

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx = \ldots$$

7.4 **Rotationskörper**: (nur L.K.) [→A.18.06]

Rotation einer Funktion um die x-Achse innerhalb der Grenzen a und b.

$$V = \pi\cdot\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

Rotation einer Fläche, die von zwei Funktionen f und g gebildet wird, um die x-Achse.

$$V = \pi\cdot\int_a^b [f(x)]^2-[g(x)]^2\,dx$$

---

8 Asymptoten: [→A.16]

Senkrechte Asymptoten werden berechnet, indem man den Nenner (das Untere) einer Funktion = Null setzt. Wenn die Funktion kein Bruch ist, also keinen Nenner hat, gibt’s auch keine Asymptoten. [Ausnahme: ln-Funktionen haben ebenfalls senkrechte Asymptoten]

Waagerechte oder schiefe Asymptoten erhält man immer, indem man $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ laufen lässt.

Bei gebrochen-rationalen Funktionen kann man das abkürzen, indem man die höchsten Potenzen von Zähler und Nennen vergleicht oder noch besser, indem man oben und unten die höchste Potenz ausklammert.

Bei e-Funktionen lässt man ebenfalls x gegen $\pm\infty$ gehen und verwenden, dass $e^{+\infty} \to +\infty$ geht und $e^{-\infty} \to 0$ geht.

Die Kurzvariante: einen e-Term ersetzt man gedanklich durch „0". Das Ergebnis ist die Asymptote.

---

9. Wachstum:

9.1 Exponentielles Wachstum: $f(t) = a \cdot e^{-kt}$ [→A.30.03]

t=Zeit f(t)=Bestand (der Bakterien, des Geldes, die gewachsene Höhe, ..)

f(0)=a=Anfangsbestand, k=irgendeine Zahl (nennt sich Wachstumsfaktor)

9.2 Beschränktes Wachstum: $f(t) = G - a \cdot e^{-kt}$ [→A.30.05]

t=Zeit f(t)=Bestand (der Bakterien, des Geldes, die gewachsene Höhe, ..)

f(0)=G−a=Anfangsbestand, k = Wachstumsfaktor

G = Grenze = Sättigungsgrenze = waagerechte Asymptote

---

10. Umkehrfunktionen: (nur Leistungskurs) [→A.28]

10.1 Allgemein

Umkehrfunktionen werden mit f^{-1}, g^{-1}, ... oder $\bar{f}$, $\bar{g}$, ... bezeichnet.

Man bestimmt Umkehrfunktionen, in dem man die Ausgangsfunktion nach „x" auflöst und dann die Variablen „x" und „y" vertauscht. Die x-Werte der Umkehrfunktion sind also die y-Werte der Ausgangsfunktion und umgekehrt.

Es gilt also: $x=\bar{y}$ und $y=\bar{x}$, damit auch $x=\bar{y}=\bar{f}(\bar{x})$ und $y=f(x)=\bar{x}$.

Für Definitions- und Wertemenge gilt damit auch: $\mathbb{D}_f=\mathbb{W}_{\bar{f}}$ und $\mathbb{D}_{\bar{f}}=\mathbb{W}_{\bar{f}}$.

10.2 Voraussetzungen

Eine Funktion ist umkehrbar, wenn sie streng monoton ist [steigend oder fallend], sprich wenn sie keine Hoch- und Tiefpunkte hat.

Ist eine Funktion nicht monoton, kann sie nur in ihren einzelnen monotonen Abschnitten umgekehrt werden.

10.3 Umkehrfunktionen zeichnen

Hat man den Graphen einer Funktion f gegeben, erhält man den Graphen der Umkehrfunktion $\bar{f}$ durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden [y=x].

Meist eleganter: man erstellt eine Wertetabelle von f(x). Vertauscht man hier x- und y-Werte, erhält man die Wertetabelle von $\bar{f}(x)$.

10.4 Steigung

Die Steigung der Umkehrfunktion ist der Kehrwert der Steigung der Funktion.

$$\bar{f}'(\bar{x}) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \text{mit } \bar{x}=y=f(x)$$

Stichwortverzeichnis

Diese Übersicht gibt's im
Download-Center von www.mathe-seite.de

oder unter