Zusammenfassung der Vektor-Geometrie

Die Objekte, um welche es in der Vektorgeometrie geht, sind:
Punkte, **Geraden**, **Ebenen**.

Sie sollten folgende wichtige Themen beherrschen:

1. Grundlegendes......................................1
- **1.1 Die Koordinatenachsen...........................1**
- **1.2 Die Koordinatenebenen...........................1**
- **1.3 Mitte von zwei Punkten..........................2**
- **1.4 Aufstellen von Geraden..........................2**
- **1.5 Aufstellen von Ebenen...........................2**

2. Schnittmengen......................................2
- **2.1 Schnitt Gerade-Gerade...........................2**
- **2.2 Schnitt Gerade-Ebene............................2**
- **2.3 Schnitt Ebene-Ebene.............................3**

3. Abstände...3
- **3.1 Abstand Punkt-Punkt.............................3**
- **3.2 Abstand Punkt-Gerade............................3**
- **3.3 Abstand Punkt-Ebene.............................3**
- 3.4 Abstand Gerade-Gerade (beide parallel). .3
- 3.5 Abstand Gerade-Gerade (beide windschief)..4
- 3.6 Abstand Gerade-Ebene.........................4
- 3.7 Abstand Ebene-Ebene..........................4

4. Ebenenformen.......................................4
- **4.1 Die drei Ebenenformen...........................4**
- **4.2 PF in KF umwandeln..............................4**
- 4.3 KF in PF umwandeln............................4
- 4.4 NF in KF umwandeln............................4
- 4.5 KF in NF umwandeln............................4

5. Spiegeln..5
- **5.1 Spiegeln Punkt an Punkt.........................5**
- **5.2 Spiegeln Punkt an Gerade........................5**
- **5.3 Spiegeln Punkt an Ebene.........................5**
- 5.4 Spiegeln Gerade an Punkt.....................5
- 5.5 Spiegeln Gerade an Ebene.....................5
- 5.6 Spiegeln Ebene an Punkt.......................5

6. Sonstiges..5
- **6.1 Skalarprodukt...5**
- **6.2 Kreuzprodukt (Vektorprodukt)................5**
- **6.3 Winkel..6**
- **6.4 Spurpunkte...6**
- 6.5 Flächenberechnungen..........................6
- 6.6 Volumenberechnungen.........................6

Der Eintrag in eckigen Klammern hinter den Kapitelnamen gibt die Kap.Nr.
des Themas im Buch „Vektorgeometrie“ bzw. auf der **www.Mathe-Seite.de** wieder!

1. Grundlegendes

1.1 Die Koordinatenachsen:

Die x_1-Achse hat die Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Alle Punkte auf der x_1-Achse haben die Form: $P(x_1|0|0)$.

Die x_2-Achse hat die Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Alle Punkte auf der x_2-Achse haben die Form: $P(0|x_2|0)$.

Die x_3-Achse hat die Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Alle Punkte auf der x_3-Achse haben die Form: $P(0|0|x_3)$

1.2 Die Koordinatenebenen:

Die x_1x_2-Ebene hat die Koordinatengleichung: $x_3=0$,

den Normalenvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und die Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Die x_1x_3-Ebene hat die Koordinatengleichung: $x_2=0$,

den Normalenvektor: $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und die Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Die x_2x_3-Ebene hat die Koordinatengleichung: $x_1=0$, den Normalenvektor: $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und die Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

1.3 Mitte von zwei Punkten $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ ist: $M_{AB}\left(\frac{a_1+b_2}{2}\middle|\frac{a_2+b_2}{2}\middle|\frac{a_3+b_3}{2}\right)$

1.4 Aufstellen von Geraden durch zwei Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ [→V.01.03] :

$$g_{AB} : \vec{x} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix}$$

1.5 Aufstellen von Ebenen [→V.01.03]

Drei Punkte sind gegeben: $A(a_1|a_2|a_3)$, $B(b_1|b_2|b_3)$ und $C(c_1|c_2|c_3)$:

$$E_{ABC} : \vec{x} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}c_1-a_1\\c_2-a_2\\c_3-a_3\end{pmatrix}$$ [←Ebene in Parameterform]

Eine Gerade und eine Punkt sind gegeben: $P(p_1|p_2|p_3)$ und $g : \vec{x} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

$$E_{P,g} : \vec{x} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}p_1-a_1\\p_2-a_2\\p_3-a_3\end{pmatrix}$$ [←Ebene in Parameterform]

Zwei, sich schneidende, Geraden sind gegeben: $g : \vec{x}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ und $h : \vec{x}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}$

$$E_{g,h} : \vec{x} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}$$ [←Ebene in Parameterform]

Zwei parallele Geraden sind gegeben: $g : \vec{x} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}$

$$E_{P,g} : \vec{x} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}c_1-a_1\\c_2-a_2\\c_3-a_3\end{pmatrix}$$ [←Ebene in Parameterform]

Sind g und h windschief oder identisch, gibt's keine Ebene.

Eine Gerade g, die senkrecht auf E steht, ist gegeben sowie ein Punkt P:

$P(p_1|p_2|p_3)$ und $g : \vec{x} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $E : b_1\cdot x_1+b_2\cdot x_2+b_3\cdot x_3=d$

d bestimmt man, indem man P in die Ebene für x_1, x_2, x_3 einsetzt.
[d.h. $d=b_1\cdot p_1+b_2\cdot p_2+b_3\cdot p_3$]

2. Schnittmengen

2.1 Schnitt Gerade-Gerade [→V.02.01]

Beide Richtungsvektoren vergleichen.

Sind beide Richtungsvektoren Vielfache voneinander, so sind die Geraden parallel oder identisch.

Sind die Richtungsvektoren keine Vielfache, sind die Geraden windschief oder schneiden sich.

Beide Geraden gleichsetzen [egal was bei den Richtungsvektoren rauskam]. Man erhält ein LGS mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten.

Waren die Richtungsvektoren Vielfache und das LGS liefert einen Widerspruch, so sind die Geraden parallel.

Waren die Richtungsvektoren Vielfache und das LGS liefert zwei Mal eine wahre Aussage, so sind die Geraden identisch.

Waren die Richtungsvektoren keine Vielfache und das LGS liefert einen Widerspruch, so sind die Geraden windschief.

Waren die Richtungsvektoren keine Vielfache und das LGS liefert die Parameter „r“ und „s“ ohne Widerspruch, so haben die Geraden einen Schnittpunkt.

2.2 Schnitt Gerade-Ebene [→V.02.02]

x_1, x_2 und x_3 aus der Gerade in die Koordinatengleichung der Ebene einsetzen.

Erhält man einen Widerspruch, sind Gerade und Ebene parallel.

Erhält man eine wahre Aussage, liegt die Gerade in der Ebene.

Erhält man für den Parameter der Geraden ein Ergebnis [eine Zahl], so gibt es einen Schnittpunkt. Den Schnittpunkt erhält man, indem man den Parameter wieder in die Gerade einsetzt.

2.3 Schnitt Ebene-Ebene [→V.02.03]

Falls beide Ebenen in Koordinatenform angegeben sind:

Beide Ebenengleichungen so miteinander verrechnen, dass x_1, x_2 oder x_3 wegfällt. Annahme x_1 fällt weg, dann wählt man z.Bsp. x_3=t. Nun erhält man sofort auch x_2 in Abhängigkeit von t und beim Einsetzen in die erste Gleichung auch x_1 in Abhängigkeit von t. Diese Ergebnisse von x_1, x_2 und x_3 übereinanderschreiben und in einen Vektor ohne „t“ und einen Vektor mit „t“ auseinanderziehen. Der einen Vektor wird der Stützvektor, der andere wird der Richtungsvektor. Fertig ist die Schnittgerade.

Eine Ebene ist in Koordinatenform, die andere in Parameterform angegeben:

x_1, x_2 und x_3 aus der „Parameterform-Ebene“ in die Koordinatengleichung der anderen Ebene einsetzen. Man erhält sowas wie z.Bsp. „r=5–2s“. Nun setzt man „r“ wieder in die Parametergleichung ein, man erhält im Normalfall vier Vektoren: zwei mit „s“ und zwei ohne Parameter. Alle Vektoren ohne Parameter verrechnet man zum Stützvektor der Schnittgeraden, die Vektoren mit Parameter „s“ verrechnet man zum Richtungsvektor.

Falls beide Ebenen in Parameterform angegeben sind:

Beide Ebenen gleichsetzen. Man erhält ein LGS. Die Methode ist eher ungeschickt. Man sollte lieber eine oder beide Ebenen in Koordinatenform umwandeln und eine andere Methode wählen.

3. Abstände

3.1 Abstand Punkt-Punkt [→V.03.01]

Gegeben seien die Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

3.2 Abstand Punkt-Gerade   Gegeben seien der Punkt P und die Gerade g

Weg über die Lotebene [→V.03.02]:

Man stellt eine Lotebene auf [der Normalenvektor der Lotebene ist der Richtungsvektor von g. Damit hat man die linke Seite der Koordinatengleichung. Um die rechte Seite zu erhalten, setzt man die Koordinaten von P in die Ebene ein].

Diese Lotebene schneidet man mit der Geraden und erhält den Lotfußpunkt L.

Der Abstand von P zu L ist auch der gesuchte Abstand von P zur Geraden g.

Weg über das Skalarprodukt [→V.03.03]:

Man schreibt die Gerade in Punktform um [als laufender Punkt] und stellt den Verbindungvektor von diesem Punkt zu P auf [in Abhängigkeit vom Parameter]. Man berechnet das Skalarprodukt von diesem Verbindungsvektor mit dem Richtungsvektor von g und setzt es Null.

Man erhält einen Wert für den Parameter, welchen man in g einsetzt und den Lotfußpunkt erhält.

Der Abstand von P zum Lotfußpunkt ist der gesuchte Abstand.

3.3 Abstand Punkt-Ebene   Gegeben sind $P(p_1|p_2|p_3)$ und $E : n_1 \cdot x_1+n_2 \cdot x_2+n_3 \cdot x_3 = d$

Weg über die HNF [→V.03.07]:

Die HNF der Ebene lautet: $\frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - d}{\sqrt{n^2_1 + n^2_2 + n^2_3}} = 0$

In die HNF setzt man für x_1, x_2, x_3 die Koordinaten von P ein und erhält den Abstand

$\Rightarrow \; d(E,P) = \frac{|n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3 - d|}{\sqrt{n^2_1 + n^2_2 + n^2_3}}$

Weg über die Lotgerade [→V.03.06]:

Man stellt eine Lotgerade auf [der Normalenvektor der Ebene ist der Richtungsvektor der Lotgerade. P ist der Stützvektor der Lotgerade].

Diese Lotgerade schneidet man mit der Ebene und erhält den Lotfußpunkt L.

Der Abstand von P zu L ist auch der gesuchte Abstand von P zur Geraden g.

3.4 Abstand Gerade-Gerade (beide parallel)

Man wählt von der einen Gerade den Stützvektor aus und berechnet den Abstand davon zur anderen Gerade. Das ist der gesuchte Abstand. (→ V.03.08)

3.5 Abstand Gerade-Gerade (beide windschief)

Man erstellt zuerst eine Hilfsebene (in Parameterform) aus einem der Stützvektoren und den Richtungsvektoren beider Geraden. Diese Ebene wandelt man in Koordinatenform um (→ V.01.06).

Nun bestimmt man den Abstand der Ebene zum *anderen* Stützvektor (→ V.03.07).

3.6 Abstand Gerade-Ebene

Die Gerade muss parallel zur Ebene sein, sonst macht die Frage keinen Sinn.

Man verwendet den Stützvektor der Gerade und berechnet davon den Abstand zur Ebene (→ V.03.08).

3.7 Abstand Ebene-Ebene

Die Ebenen müssen parallel sein, sonst macht die Frage keinen Sinn.

Man verwendet irgend einen Punkt der einen Ebene (z.B. einen Spurpunkt) und berechnet dessen Abstand zur anderen Ebene (→ V.03.08).

4. Ebenenformen

4.1 Die drei Ebenenformen

Es gibt drei wichtige Ebenenformen:

→ die Koordinatenform (KF): $E : n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$

→ die Parameterform (PF): $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

→ die Normalenform (NF): $E : \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right] = 0$

4.2 PF in KF umwandeln Gegeben ist eine Ebene in Parameterform:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Weg über das Kreuzprodukt [=Vektorprodukt] [→ V.01.06]:

Man bestimmt das Kreuzprodukt aus den beiden Richtungsvektoren und erhält als Ergebnis den Normalenvektor.

Nun fehlt von der Koordinatengleichung $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ nur noch „d“. Dieses erhält man, indem man den Stützvektor in die Ebenengleichung einsetzt.
[$d = n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3$]

Weg über das Skalarprodukt [→V.01.06]:

Der Normalenvektor ist unbekannt. $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

Das Skalarprodukt beider Richtungsvektoren mit dem Normalenvektor muss Null geben, d.h. man erhält ein LGS mit zwei Gleichungen. I: $b_1 \cdot n_1 + b_2 \cdot n_2 + b_2 \cdot n_2 = 0$
und II: $c_1 \cdot n_1 + c_2 \cdot n_2 + c_2 \cdot n_2 = 0$
Beide Gleichungen derart miteinander verrechnen, dass n_1, n_2 oder n_3 wegfällt.
In der Ergebnisgleichung für n_1, n_2 oder n_3 eine beliebige Zahl einsetzen, alle anderen berechnen.
Nun hat man n_1, n_2 und n_3, damit fehlt von der Koordinatengleichung $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ nur noch „d". Dieses erhält man, indem man den Stützvektor in die Ebenengleichung einsetzt.

4.3 KF in PF umwandeln

Man braucht drei beliebige Punkte der Ebene (z.B. die drei Spurpunkte, [→ V.01.10] und baut daraus eine Parameterform der Ebene auf [→ V.01.05].

4.4 NF in KF umwandeln

Die Einträge des Normalenvektors aus der Normalenform schreibt man vor die „x_1", „x_2" und „x_3" der Koordinatenform. Nun setzt man noch den Stützvektor $(p_1|p_2|p_3)$ aus der Normalenform in die Koordinatengleichung ein, um d zu erhalten (d.h. $d = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3$). [→ V.01.08]

Normalenform: $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right] = 0$ Koordinatenform: $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$

4.5 KF in NF umwandeln

Für die Normalenform braucht man den Normalenvektor und einen Stützvektor.
Die Zahlen des Normalenvektors stehen vor den „x_1", „x_2" und „x_3" in der Koordinatengleichung,
der Stützvektor $(p_1|p_2|p_3)$ könnte z.B. ein Spurpunkt [→ V.01.08] der Ebene sein.

Koordinatenform: $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ Normalenform: $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right] = 0$

5. Spiegeln

5.1 Spiegeln Punkt an Punkt

Nehmen wir an, A soll am Punkt Z gespiegelt werden. Der Spiegelpunkt sei dann B.
Man erhält die Koordinaten von B durch: $B = A + 2 \cdot \overrightarrow{AB}$ Korrekte Schreibweise wäre: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AB}$

5.2 Spiegeln Punkt an Gerade

Der Punkt A soll an der Gerade g gespiegelt werden, der Spiegelpunkt sei A*. Man stellt eine Lotebene auf, die senkrecht auf g steht und durch P geht. (Der Normalenvektor der Lotebene ist der Richtungsvektor von g, ein Stützvektor der Lotebene ist A). Nun berechnet man den Schnittpunkt der Gerade mit der Lotebene, das ist der Lotfußpunkt. Man spiegelt A am Lotfußpunkt und erhält A* [→ V.04.03].

5.3 Spiegeln Punkt an Ebene

Der Punkt A soll an der Ebene E gespiegelt werden, der Spiegelpunkt sei A*. Man stellt eine Lotgerade auf, die senkrecht auf E steht und durch P geht. (Der Punkt A ist der Stützvektor der Lotgerade, der Normalenvektor der Ebene ist der Richtungsvektor der Lotgerade). Nun berechnet man den Schnittpunkt der Lotgerade mit der Ebene, das ist der Lotfußpunkt. Man spiegelt A am Lotfußpunkt und erhält A* [→ V.04.04].

5.4 Spiegeln Gerade an Punkt

Spiegelt man eine Gerade g an einem Punkt Z, bleibt der Richtungsvektor erhalten. Man benötigt also nur den Stützvektor der gespiegelten Gerade. Dafür spiegelt man den Stützvektor der ersten Gerade am Punkt Z [→ V.04.05]. Der neue, gespiegelte Punkt ist der Stützvektor der neuen Geraden g*.

5.5 Spiegeln Gerade an Ebene

Man bestimmt den Schnittpunkt von Gerade und Ebene (der bleibt ja beim Spiegeln unverändert). Dazu spiegelt man der Stützvektor der Geraden an der Ebene (→ V.04.05). Aus diesem gespiegelten Punkt und dem Schnittpunkt erstellt man die neue Spiegelgerade [→ V.01.03].

5.6 Spiegeln Ebene an Punkt

Spiegelt man eine Ebene E an einem Punkt Z, bleibt der Normalenvektor (aber auch die Richtungsvektoren) der Ebene erhalten. Man benötigt also nur einen Punkt der gespiegelten Ebene. Dafür spiegelt man einen Punkt der Ebene E (z.B. einen Spurpunkt [→ V.01.10)) am Punkt Z [→ V.04.02]. Mithilfe des (unveränderten) Normalenvektors und dem gespiegelten Punkt baut man die neue Ebene E* auf.

6. Sonstiges

6.1 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren berechnet man nach folgender Regel:

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w$ Man erhält also eine Zahl und *keinen* Vektor.

Falls das Ergebnis vom Skalarprodukt =0 ist, stehen die Vektoren **senkrecht** aufeinander, d.h. sie sind orthogonal ! [V.05.02]

(Fälschlicherweise wird manchmal auch die Länge eines Vektors als Skalarprodukt bezeichnet. Das ist aber falsch, die Länge des Vektors ist der Betrag!)

6.2 Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

Für das Kreuzprodukt gibt es zwei wichtige Anwendungen:

1. Die wichtigste Anwendung ist die Berechnung des Normalenvektors aus den Richtungsvektoren. (Das braucht man für die Umwandlung einer Ebene von Parameterform in Normalenform [→ V.01.08] oder Parameterform in Koordinatenform [→ V.01.06]).
   Man schreibt dazu beide Richtungsvektoren übereinander und rechnet nun über Kreuz [Details unter V.05.03]. Man erhält den Normalenvektor. De facto wird man erhalten:
   $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \cdot c_3 - b_3 \cdot c_2 \\ b_3 \cdot c_1 - b_1 \cdot c_3 \\ b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1 \end{pmatrix}$.
2. Desweiteren kann man das Kreuzprodukt verwenden, um Flächeninhalte von Dreiecken und Parallelogrammen zu berechnen oder das Volumen von Pyramiden (→ V.05.07 und →V.07.04)

6.3 Winkel

Winkel zwischen zwei Ebenen:

($\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind die beiden Normalenvektoren) $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Winkel zwischen zwei Geraden:

($\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind die beiden Richtungsvektoren der Geraden) $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Winkel zwischen Gerade und Ebene:

($\vec{u}$ ist der Richtungsvektor der Geraden,
$\vec{n}$ ist der Normalenvektor der Ebene) $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

6.4 Spurpunkte

Die Spurpunkte einer Ebene sind deren Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. Bei jedem der drei Spurpunkte sind jeweils zwei Koordinaten Null. Um den Spurpunkt einer Ebene mit der x_1-Achse zu erhalten, setzt man in die Koordinatengleichung $x_2=0$ und $x_3=0$ und löst nach x_1 auf. Für die Spurpunkte mit der x_2-Achse und x_3-Achse geht man nach dem gleichen Schema vor. [→V.01.10]

Die Ebene E : $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ hat die Spurpunkte:

$S_1\left(\frac{d}{n_1}\middle|0\middle|0\right)$, $S_2\left(0\middle|\frac{d}{n_2}\middle|0\right)$, $S_3\left(0\middle|0\middle|\frac{d}{n_3}\right)$.

z.B. $E: 2x_1+3x_2-4x_3 = 12 \quad \Rightarrow \quad S_1(6|0|0) \quad S_2(0|4|0) \quad S_3(0|0|-3)$.

Die Verbindungsgeraden von jeweils zwei Spurpunkten heißen Spurgeraden.

Die Spurpunkte einer Gerade sind deren Schnittpunkte mit den Koordinatenebenen. Z.B. ist beim Schnittpunkt mit der x_1x_2-Ebene $x_3=0$. Daher setzt man die x_3-Zeile der Gerade Null, löst nach dem Parameter t auf und setzt diesen wieder in die Gerade ein. Man erhält den Schnittpunkt / Spurpunkt der Geraden mit der x_1x_2-Ebene.
Ähnlich geht man bei der Berechnung der Spurpunkte mit der x_1x_3-Ebene und der x_2x_3-Ebene vor. [→V.01.09]

6.5 Flächenberechnungen [→V.05.07]

Die Fläche eines Dreiecks ABC kann man berechnen mit: $A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

(Erst Kreuzprodukt der beiden Vektoren bilden, vom Ergebnisvektor den Betrag bilden.)

Die Fläche eines Parallelogramms ABCD kann man berechnen mit: $A_{ABCD} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$

(Erst Kreuzprodukt der beiden Vektoren bilden, vom Ergebnisvektor den Betrag bilden.
Bem.: Die Formel gilt auch für Rechtecke, Rauten, Quadrate, da das ebenfalls Parallelogramme sind.)

6.6 Volumenberechnungen [→V.07.04]

In der Regel braucht man nur das Volumen von Pyramiden, hierfür gilt: $V_{Pyr} = \frac{1}{3}\cdot G\cdot H$

Die Grundfläche G berechnet man irgendwie nach dem Schema von [→V.07.02],
die Pyramidenhöhe H ist der Abstand von der Ebene der Grundfläche zur Pyramidenspitze.

Ende Gelände.

Diese Formelsammlung gibt's
im Download-Center von www.mathe-seite.de oder unter