Lernkarteikarten

Mathematik

gymnasiale Oberstufe

havonix

Kompaktwissen

h[x]=
havonix

→ hier unten befinden sich Querverweise auf
die Kapitel von www.mathe-seite.de

Welches sind die drei
binomischen Formeln ?

1. $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

2. $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

3. $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

[falls man die bin. Formeln vergisst, multipliziert man einfach die linke Seiten aus, also z.B. $(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ab+b^2$.]

→ B.01.02

Verschiedenes, Potenzgesetze

1. Wie schreibt man $\frac{1}{x^n}$ um ?
2. Wie schreibt man Wurzeln um ?
3. Was gibt $x^m \cdot x^n$?
4. Was gibt $\left(x^m\right)^n$?

1. $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ oder $a^b = \frac{1}{a^{-b}}$

2. $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ oder $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

3. x^{m+n}

4. $x^{m \cdot n}$

→ B.03, →B.04

Verschiedenes, Logarithmengesetze

1. $\log_a(b^n) = ??$

2. $\log_a(x \cdot y) = ??$

3. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = ??$

1. $\log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b)$

2. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

3. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

Wie berechnet man den
Abstand zweier Punkte ?

Im Zweidimensionalen (also in der x-y-Ebene) ist der Abstand von $A(x_A \mid y_A)$ zu $B(x_B \mid y_B)$:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Im Dreidimensionalen (in der Vektorgeometrie) ist der Abstand von $A(x_{1A}|x_{2A}|x_{3A})$ zu $B(x_{1B}|x_{2B}|x_{3B})$:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_{1A} - x_{1B})^2 + (x_{2A} - x_{2B})^2 + (x_{3A} - x_{3B})^2}$$

(Beide Abstandsberechnungen gehen auf Pythagoras zurück.)

→ A.01.04, →V.03.01

Wie bestimmt man den Mittelpunkt von zwei Punkten $A(x_A \mid y_A)$ und $B(x_B \mid y_B)$?

Zusammenzählen und durch 2 teilen !

Im Zweidimensionalen (also in der x-y-Ebene)
ist der Mittelpunkt von $A(x_A \mid y_A)$ und $B(x_B \mid y_B)$:

$$M_{AB}\left(\frac{x_A+x_B}{2} \,\middle|\, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Im Dreidimensionalen (in der Vektorgeometrie)
ist die Mitte von $A(x_{1A}|x_{2A}|x_{3A})$ und $B(x_{1B}|x_{2B}|x_{3B})$:

$$M_{AB}\left(\frac{x_{1A}+x_{1B}}{2} \,\middle|\, \frac{x_{2A}+x_{2B}}{2} \,\middle|\, \frac{x_{3A}+x_{3B}}{2}\right)$$

→ A.01.01, →V.01.02

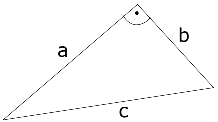
Wie bestimmt man die Steigung
zwischen zwei Punkten ?

Nehmen wir mal an, die beiden Punkte haben die Koordinaten: $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$.
Dann berechnet sich die Steigung zwischen den beiden Punkten.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

→ A.01.02

Wie lautet der Satz von Pythagoras ?



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Hierbei ist c die Hypotenuse des Dreiecks,
(welche gegenüber des rechten Winkels liegt),
a und b sind die Katheten.

→ T.02.01

Wie stellt man den Dreisatz auf?

Beispiel:
Ein Funktionswert reduziert sich von 24,6 auf 17,3. Welcher prozentualen Abnahme entspricht das ?

Man muss nur die entsprechenden Zahlen übereinander schreiben: Funktionswerte über Funktionswerte – Prozente über Prozente.

$$\begin{array}{ccc} 24{,}6 & \triangleq & 100\% \\ 17{,}3 & \triangleq & x \end{array}$$

Nun multipliziert man über Kreuz.

$$\begin{array}{ccc} 24{,}6 & \triangleq & 100\% \\ 17{,}3 & \triangleq & x \end{array}$$

Man erhält also:

$$24{,}6 \cdot x = 17{,}3 \cdot 100$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{17{,}3 \cdot 100}{24{,}6} = 70{,}32\%$$

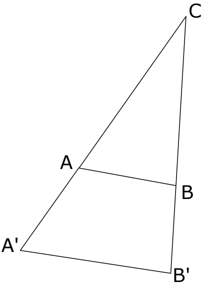
→ G.01.03, →G.01.04, →X.01.02

Was besagt der Strahlensatz ?

Der Strahlensatz beschreibt, was passiert, wenn man ein Dreieck ABC vergrößert oder verkleinert.
Alle Seiten vergrößern (oder verkleinern) sich um den gleichen Faktor: den Vergrößerungsfaktor.
Sofern AB und A'B' parallel sind, gilt:

$$\frac{AC}{A'C} = \frac{BC}{B'C} = \frac{AB}{A'B'}$$

(immer kurze Seiten zu langen Seiten
[auch lang zu kurz ist möglich])



(Der Strahlensatz ist nicht *unbedingt* für´s Abitur notwendig.
Oft ist er jedoch recht hilfreich.)

→T.02.03, →X.01.03

Wann stellt man den Taschenrechner auf Bogenmaß (RAD bzw. Radian),

wann stellt man ihn auf Gradmaß (DEG, Degree) ?

Unmathematische Faustregel:
Ist der Winkel in lateinischen Buchstaben angegeben (z.B. sin(x), cos(2x+3),..) muss der Taschenrechner auf Bogenmaß (RAD, Radian) gestellt sein.
Ist der Winkel in griechischen Buchstaben angegeben (z.B. sin(α), cos(β),..) muss der Taschenrechner auf Gradmaß (DEG, Degree) gestellt sein.

Rechnet man mit Sinus- oder Kosinus*funktionen*, (Kurvendiskussion, etc..) wird der Taschenrechner auf Bogenmaß gestellt. Z.B. bei $f(x)=\sin(2x)-1$
Hat bzw. braucht man richtige Winkel, die man in Grad misst, wird der Taschenrechner auf Gradmaß gestellt. z.B. bei $m=\tan(15{,}2°)$

→ B.07.02

Wie geht man vor, um beliebige
Gleichungen zu lösen ?

- Falls Nenner existieren, immer mit allen Nennern multiplizieren.

- Alle vorhandenen Klammern auflösen.

- Alles auf eine Seite bringen (gleich Null setzen) und die Nullstellen der entstandenen Gleichung berechnen.

- Danach:
  Ausklammern,
  p-q-Formel oder a-b-c-Formel,
  Substitution
  [evtl. Polynomdivision]

→ A.12

Wie sieht eine Gleichung aus, die unendlich viele Lösungen liefert?

Wie sieht eine Gleichung aus, die keine Lösung liefert?

Eine Gleichung liefert immer dann unendlich viele Lösungen, wenn es sich um eine wahre Aussage handelt.

z.B. $0=0$ oder $5=5$ oder ...

Eine Gleichung liefert immer dann keine Lösung, wenn es sich um einen Widerspruch handelt.

z.B. $0=1$ oder $2=5$ oder ...

Wie kann man vorgehen,
um die Nullstellen einer
Funktion zu berechnen ?

- Ausklammern (falls möglich)
  (Immer die beste Variante)

- Mitternachtsformel.
  (p-q-Formel oder a-b-c-Formel)

- Substitution.

- Polynomdivision.
  (Immer die schlechteste Variante)

- Verzweifeln und sich die Haare raufen.
  (Immer die nutzloseste Variante)

→ A.12

Wie lautet die Lösungsformel
für quadratische Gleichungen ?

Quadratische Gleichungen löst man mit der Mitternachtsformel. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten.
(Man muss nur eine davon kennen!)

Man verwendet die a-b-c-Formel, wenn die Gleichung die Form:
$ax^2+bx+c = 0$ hat.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Oder die p-q-Formel, wenn die Gleichung die Form:
$x^2+px+q = 0$ hat.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

→A.12.04, ,→A.12.05, →G.04

Unter welchen Voraussetzungen
wendet man Substitution an
und wie geht man hierbei vor ?

Substitution wendet man an, wenn ein Term öfter auftaucht, jedoch mit unterschiedlichen Hochzahlen. Eine der auftretenden Hochzahlen muss doppelt so groß sein wie die andere.

z.Bsp.

$x^4-5x^2-6 = 0$ Substitution: $x^2=u$

$(\sin x)^2-2\sin x-3 = 0$ Substitution: $\sin(x)=u$

$e^{-4x} + e^{-2x} = 2$ Substitution: $e^{-2x}=u$

→ A.12.06

Wie löst man eine Gleichung, in welcher die Unbekannte in der Hochzahl steht ?

z.Bsp.
Lösen Sie: $3 \cdot 1{,}5^{2x} = 18$

Steht die Unbekannte in der Hochzahl, benötigt man irgendwann mal auf jeden Fall den Logarithmus. (z.B. „ln").

$3\cdot 1{,}5^{2x} = 18$ | :3

$1{,}5^{2x} = 6$ | ln()

$\ln(1{,}5^{2x}) = \ln(6)$ | Hochzahl vorziehen

$2x\cdot\ln(1{,}5) = \ln(6)$ | : 2ln(1,5)

$$x = \frac{\ln(6)}{2\ln(1{,}5)}$$

→ B.06, →A.41.01

Wieviele Gleichung benötigt man
um ein Gleichungssystem von
mehreren Gleichungen mit mehreren
Unbekannten zu lösen ?

Man braucht immer so viele Gleichungen,
wie man Unbekannte hat.

Hat man weniger Gleichungen als Unbekannte,
erhält man normalerweise unendlich viele Lösungen.

Hat man mehr Gleichungen als Unbekannte, erhält man normalerweise keine Lösung. Häufige Ausnahme: Während der Rechnung fallen einige Gleichungen weg, (wegen „0=0“) so dass man wieder einen der oberen Fälle hat.

→G.02, →M.02

Wie ist die genaue Vorgehensweise
des Gauß-Verfahrens bei 3
Gleichungen mit drei Unbekannten?

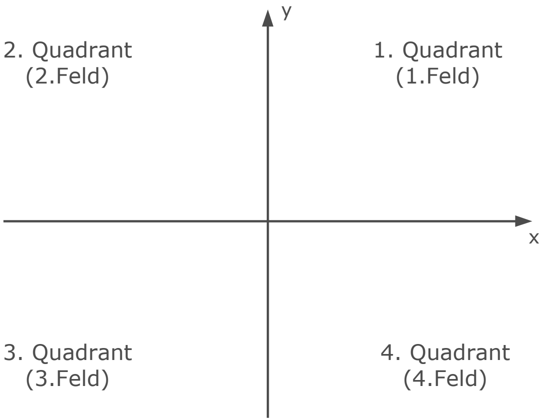
- Zuerst verrechnet man *die erste mit der zweiten* Gleichung, um das „x_1“ der zweiten Zeile zu eliminieren.
- Danach verrechnet man *die erste mit der dritten* Gleichung, um das „x_1“ der dritten Zeile zu eliminieren.
- Zuletzt verrechnet man *die zweite mit der dritten* Gleichung, um das „x_2“ der dritten Zeile zu eliminieren.

→G.02.07, →M.02

Welches sind die wichtigen
Funktionstypen, die
man für´s Abi kennen muss ?

- Ganzrationale Funktionen bzw. Polynome bzw. Parabeln höherer Ordnung.
  (z.B. $y=2x^3+5x^2-x+6$, ...)
- Gebrochen-rationale Funktionen
  (Brüche, in denen „x“ unten im Nenner steht)
- e-Funktionen
  (beinhaltet „e“ und „x“ in der Hochzahl)
- trigonometrische Funktionen
  (Sinus– und Kosinus–Funktionen)
- Wurzel-Funktionen
- Logarithmusfunktionen

Was sind die vier Quadranten
(die vier Felder)
und wo liegen sie ?

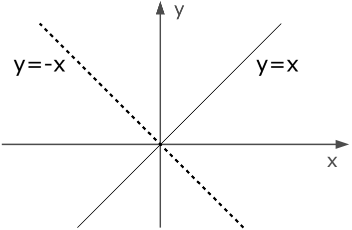

y
2. Quadrant
(2.Feld)
1. Quadrant
(1.Feld)
x
3. Quadrant
(3.Feld)
4. Quadrant
(4.Feld)

→A.27.01

Wie lautet die Gleichung der ersten und der zweiten Winkelhalbierenden ?

Die erste Winkelhalbierende lautet: $y = x$

Die zweite Winkelhalbierende lautet: $y = -x$



→A.27.01

Was versteht man unter
der Definitionsmenge ?

Was versteht man unter
der Wertemenge ?

Die *Definitionsmenge* sind alle *x-Werte*,
die man in eine Funktion einsetzen darf.
(Probleme gibt's wenn der Nenner Null wird oder
der Term unter einer Wurzel negativ wird.)

Die *Wertemenge* sind alle *y-Werte*,
die eine Funktion annehmen kann.
(Man erkennt sie eigentlich nur am Schaubild
der Funktion, also an Hoch- Tiefpunkten
und Asymptoten, etc...)

→A.11.05, →A.11.06

Wie bestimmt man die
Nullstellen einer Funktion ?

Man setzt die Funktion Null.

$$f(x) = 0$$

→ A.12

Wie berechnet man die Extrempunkte
einer Funktion ?

- Man setzt die Ableitung f'(x) Null ⇒ f'(x)=0

- Die erhaltenen x-Werte setzt man in f(x) ein, um die y-Werte zu erhalten.

- Desweiteren setzt man die x-Werte in f''(x) ein, um zu schauen, ob es sich um einen Hoch- oder einen Tiefpunkt handelt.
  (Ist das Ergebnis von f''(x) positiv, so handelt es sich um einen Tiefpunkt. Bei negativem Ergebnis liegt ein Hochpunkt vor.)

→ A.19

Wie berechnet man die Wendepunkte
einer Funktion ?

- Man setzt die zweite Ableitung f''(x) Null.
- Die erhaltenen x-Werte setzt man in f(x) ein, um die y-Werte zu erhalten,
- Desweiteren setzt man die x-Werte in f'''(x) ein, um zu überprüfen, ob´s tatsächlich ein Wendepunkt ist (das ist der Fall, falls f'''(x)≠0)

→ A.19

Wie berechnet man den Schnittpunkt
von zwei beliebigen Funktionen ?

Egal was für Funktionen man
miteinander schneiden will:

Man setzt die beiden immer gleich.

Die entstandene Gleichung löst man „x" auf.
(Alles auf eine Seite bringen, eventuell
muss man ausklammern oder
Mitternachtsformel anwenden.. ?!)

Die y-Werte der Schnittpunkte erhält man,
indem man „x" in eine der Funktionen
einsetzt.

Wie überprüft man Funktionen
auf Symmetrieeigenschaften?

Wichtig sind Punktsymmetrie zum Ursprung
und Achsensymmetrie zu y-Achse.

- Zum Beweis betrachtet man f(-x)
  (Für „x“ setzt man „(-x)“ in die Funktion ein)
  Bei **f(-x) = f(x)** gilt Symmetrie zur y-Achse.
  Bei **f(-x) = -f(x)** gilt Symmetrie zum Ursprung.

- Bei Polynomen (x^3,x^2,x,…) erkennt man Symmetrie an den Hochzahlen.
  Gerade Hochzahlen bedeuten Achsensymmetrie,
  ungerade Hochzahlen bedeuten Punktsymmetrie,
  gemischte Hochzahlen bedeuten keine Symmetrie.

→ A.17

Wie verschiebt man eine
Funktion in x-Richtung ?

Wie verschiebt man eine
Funktion in y-Richtung ?

Man verschiebt eine Funktion um „a“ nach links, indem man jedes „x“ durch „(x+a)“ ersetzt. Aus „f(x)“ wird also „f(x+a)“.

Man verschiebt eine Funktion um „a“ nach rechts, indem man jedes „x“ durch „(x–a)“ ersetzt. Aus „f(x)“ wird also „f(x–a)“.

Man verschiebt eine Funktion um „b“ nach oben, indem man zu f(x) „b“ dazu addiert. Aus „f(x)“ wird also „f(x)+b“.

Man verschiebt eine Funktion um „b“ nach unten, indem man von f(x) „b“ abzieht. Aus „f(x)“ wird also „f(x)–b“.

→ A.23.01

Wie streckt man eine Funktion
in y-Richtung ?

Man streckt eine Funktion in y-Richtung, indem man die gesamte Funktion mit dem Streckfaktor multipliziert.

Will man beispielsweise f(x) um den Faktor k=7 strecken, so wird das durch die neue Funktion:

$7 \cdot f(x)$ erfüllt.

→ A.23.02

Wie spiegelt man eine Funktion
an der x-Achse ?

Wie spiegelt man eine Funktion
an der y-Achse ?

Man spiegelt an der x-Achse, indem man vor die gesamte Funktion ein Minus setzt.
Aus „f(x)“ wird also „-f(x)“.

Man spiegelt an der y-Achse, indem man jedes „x“ durch ein „(-x)“ ersetzt.
Aus „f(x)“ wird also „f(-x)“.

→ A.23.03

Wie spiegelt man eine Funktion
am Ursprung ?

Wie spiegelt man eine Funktion an
einem Punkt S(a|b) ?

Man spiegelt am Ursprung, indem man
f(x) an der x-Achse *und* an der y-Achse spiegelt,

Man spiegelt an S(a|b), indem man

- ➢ f(x) zuerst um „a“ nach links und um „b“ nach unten verschiebt,
- ➢ dann am Ursprung spiegelt,
- ➢ zum Schluss f(x) wieder um „a“ nach rechts und um „b“ nach oben verschiebt.

[oder man verwendet die Formel: $f_{neu}(x)=2\cdot b-f(2a-x)$]

→ A.23.03, → A.23.04, → A.23.05

Wie spiegelt man eine Funktion an einer senkrechten Gerade $x=a$?

Wie spiegelt man eine Funktion an einer waagerechten Gerade $y=b$?

Man spiegelt an $x=a$, indem man

- ➢ $f(x)$ zuerst um „a" nach links verschiebt,
- ➢ dann an der y-Achse spiegelt,
- ➢ zum Schluss $f(x)$ wieder um „a" nach rechts verschiebt.

[oder man verwendet die Formel: $f_{neu}(x)=f(2a-x)$]

Man spiegelt an $y=b$, indem man

- ➢ $f(x)$ zuerst um „b" nach unten verschiebt,
- ➢ dann an der x-Achse spiegelt,
- ➢ zum Schluss $f(x)$ wieder um „b" nach oben verschiebt.

[oder man verwendet die Formel: $f_{neu}(x)=2\cdot b-f(x)$]

→ A.23.04, → A.23.05

Worauf muss man bei der Frage:
„Beschreiben Sie die wichtigsten
Eigenschaften einer Funktion?“
achten?

- Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte ?
  (eventuell Wendepunkte, falls die erkennbar sind)

- Asymptoten, asymptotisches Verhalten ?
  (Woher kommt f(x) links. wohin läuft sie rechts?
  Gibt es senkrechte/waagerechte Asymptoten...?)

- Ist f(x) monoton ?

- Ist f(x) nur oberhalb/unterhalb der x-Achse ?

- Verläuft f(x) nur in bestimmten Quadranten ?

- Sonstige Auffälligkeiten …

Was gilt, wenn sich zwei Funktionen berühren ?

Was gilt, wenn zwei Funktionen senkrecht aufeinander stehen (orthogonal sind) ?

Berühren sich f(x) und g(x), so sind beide Steigungen *und* die y-Werte gleich.

1. $y_1 = y_2$ $\Leftrightarrow$ **1. f(x) = g(x)**
2. $m_1 = m_2$ **2. f'(x) = g'(x)**

Schneiden sich f(x) und g(x) orthogonal, so sind die y-Werte gleich und die Steigungen sind der negative Kehrwert voneinander.

1. $y_1 = y_2$ $\Leftrightarrow$ **1. f(x) = g(x)**
2. $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ **2.** $\mathbf{f'(x) = -\frac{1}{g'(x)}}$

→ A.22.01

Wie bestimmt man die Tangente an eine Funktion in einem vorgegebenen Punkt ?

Am geschicktesten über die Tangentengleichung:

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

(x_0 ist hierbei der x-Wert des Berührpunktes)

Alternative:

Man bestimmt die Steigung der Tangente über die erste Ableitung und setzt diese zusammen mit dem x- und y-Wert des Punktes in $y = mx+b$ ein, um nach b aufzulösen.
Nun m und b wieder in $y=mx+b$ einsetzen.

→ A.15.01, → A.15.02

Wie bestimmt man die Normale an eine Funktion in einem vorgegebenen Punkt ?

Am geschicktesten über die Normalengleichung:

$$y = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

(x_0 ist hierbei der x-Wert des Berührpunktes)

Alternative:

Man bestimmt die Steigung der Tangente über die erste Ableitung. Der negative Kehrwert davon ist die Normalensteigung. Diese setzt man zusammen mit dem x- und y-Wert des Punktes in y = mx+b ein, um nach b aufzulösen.
Nun m und b wieder in y=mx+b einsetzen.

→ A.15.01, → A.15.02

Wie bestimmt man die Gleichung einer Tangente, wenn der Berührpunkt nicht gegeben ist, jedoch ein anderer Punkt, durch den die Tangente geht?

(Stichwort: Tangente von außen)

Über die Tangentengleichung:

$$y = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)$$

(x_0 ist der unbekannte x-Wert des Berührpunktes)

Für x und y setzt man die Koordinaten des gegebenen Punktes ein und erhält eine Gleichung, in welcher x_0 die einzige Unbekannte ist.

Die Gleichung löst man (von Hand oder mit GTR) und erhält x_0, und damit den Berührpunkt.

→ A.15.04

Wie bestimmt man eine
Wendetangente?

Eine Wendetangente ist einfach eine Tangente im Wendepunkt.

➢ Man berechnet zuerst den Wendepunkt.

➢ Danach bestimmt man die Tangente an f(x) im Wendepunkt.

→ A.19.02

Wie bestimmt man die
Steigung einer Funktion ?

Man setzt immer den x-Wert um welchen es geht, in die erste Ableitung $f´(x)$ ein.

→ A.11.02

Wie bestimmt man die momentane Änderungsrate einer Funktion ?

(Andere Begriffe dafür: „Änderung“, „Zunahme“, „Abnahme“ der Funktion)

Eine momentane Änderungsrate ist nichts anderes als die Steigung, also die Ableitung der Funktion in einem bestimmten Punkt.

→ A.11.02

Wie berechnet man die durchschnittliche Steigung einer Funktion in einem gegebenen Intervall I[a;b] ?

Die durchschnittliche Steigung geht zurück auf:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Bei einer durchschnittlichen Steigung von Funktionen im Intervall von x=a bis x=b heißt das:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Natürlich ist auch die Anwendung der Mittelwertformel denkbar: $m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f'(x)\,dx$

→ A.01.02, A.13.06, A.18.07

Wie berechnet man den Schnittwinkel zwischen einer Funktion (oder Geraden) und einer Parallelen zur x-Achse?

Die entscheidende Beziehung ist: $m=\tan(\alpha)$

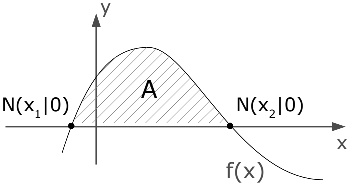
Da die Steigung m meist die erste Ableitung in einem bestimmten Punkt ist, verwendet man:

$$f'(x_0) = \tan(\alpha)$$

→ A.22.02, A.22.03

Wie bestimmt man die Fläche
zwischen einer Funktion
und der x-Achse?

Man benötigt das Integral.
Die Integralgrenzen sind meistens die Nullstellen.

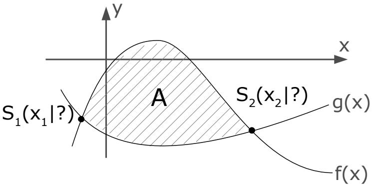


$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

→ A.18.02

Wie bestimmt man die Fläche
zwischen zwei Funktionen?

Man benötigt das Integral.
Die Integralgrenzen sind meistens die Schnittpunkte.



$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x)\, dx$$

→ A.18.03

Was ist eine Integralfunktion?

Was sind ihre typische
Eigenschaften ?

Eine Integralfunktion ist ein „normales“ Integral, dessen obere Grenze keine Zahl, sondern „x“ ist. Die Integralfunktion I(x) von der Funktion f(x) ist:

$$I(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

Zwei wichtige Eigenschaften sind:

➢ Die Ableitung der Integralfunktion ist wieder die Ausgangsfunktion: $I'(x) = f(x)$

➢ Die untere Grenze einer Integralfunktion ist immer eine Nullstelle.

Z.B. hat $I(x) = \int_2^x f(x)\,dx$ eine Nullstelle bei x=2.

→ A.18.10

Wie leitet man Polynome ab?
Wie integriert man Polynome ?

Etwas konkreter:
Was ist die Ableitung von $f(x) = a \cdot x^n$?
Was ist die Stammfunktion von $f(x)=a \cdot x^n$?

Ableitung:
Die Hochzahl kommt vor das „x",
die neue Hochzahl wird um eins kleiner.

$$f(x) = a \cdot x^n \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Stammfunktion: („aufleiten")
Die Hochzahl wird um eins erhöht.
Die neue Hochzahl kommt in den Nenner.

$$f(x) = a \cdot x^n \Rightarrow \quad F(x) = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

→ A.13.01, →A.14.01

Was spielt die innere Ableitung bei Ableitungen bzw. Stammfunktionen für eine Rolle ?

(siehe „Kettenregel“)

Beim Ableiten wird die innere Ableitung immer mit „mal" hinter die Ableitungsfunktion drangehängt
(sofern eine innere Ableitung existiert).

Beim Integrieren (Aufleiten) wird Stammfunktion immer durch die innere Ableitung geteilt
(falls eine innere Ableitung existiert).

Kurz:

f(x) = … ⇒ **f'(x) = … · (innere Ableitung)**

f(x) = … ⇒ $\mathbf{F(x) = \ldots \cdot \frac{1}{\text{innere Ableitung}}}$

→ A.13.03, →A.14.03

Was ist die Ableitung und Stammfunktion von sin- und cos-Funktionen ?

Etwas konkreter:

Es sei $f(x) = a \cdot \sin(bx+c)$ und

$g(x) = a \cdot \cos(bx+c)$

Bestimme $f'(x)$, $F(x)$, $g'(x)$ und $G(x)$!

$$f(x) = a \cdot \sin(bx+c) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot b \cdot \cos(bx+c)$$

$$F(x) = -\frac{a}{b} \cdot \cos(bx+c)$$

$$g(x) = a \cdot \cos(bx+c) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -a \cdot b \cdot \sin(bx+c)$$

$$G(x) = \frac{a}{b} \cdot \sin(bx+c)$$

ableiten ↓

sin
cos
-sin
-cos

↑ **aufleiten**

→ A.42.04, →A.42.06

Was bestimmt man die Ableitung und Stammfunktion von e-Funktionen ?

Etwas konkreter:

Es sei $f(x) = a \cdot e^{bx+c}$

Bestimme $f'(x)$ und $F(x)$!

$$f(x) = a \cdot e^{bx+c} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot b \cdot e^{bx+c}$$

$$F(x) = \frac{a}{b} \cdot e^{bx+c}$$

→ A.41.03, →A.41.05

Was ist die Ableitung von: $f(x) = \sqrt{x}$

Was ist die Stammfunktion von: $f(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad = \text{(umschreiben)} = x^{½}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \qquad = \text{(umschreiben)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{½}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} \qquad = \text{(umschreiben)} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}$$

→ A.13.02, →A.14.02

Was ist die Ableitung von: $f(x) = \ln(x)$

Was ist die Stammfunktion von: $g(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad G(x) = \ln(x)$$

→A.14.04

Was ist die Ableitung von: $f(x) = 5 \cdot \ln(2x-3)$

Was ist die Stammfunktion von: $g(x) = \dfrac{-6}{4x+1}$

$$f(x) = 5 \cdot \ln(2x-3) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{10}{2x-3}$$

$$g(x) = \frac{-6}{4x+1} \quad \Rightarrow \quad G(x) = \frac{-6}{4} \ln(4x+1)$$

(Kettenregel notwendig)

→A.14.04

Wann wendet man die Produktregel an ?

Wie lautet sie ?

Die Produktregel wendet man an,
wenn man ein Produkt ableiten soll,

also ein Produkt von zwei Faktoren,
welche *beide* mindestens ein „x“ enthalten.

$$f(x) = u \cdot v \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

→A.13.04

Wann wendet man die Quotientenregel an ?

Wie lautet sie ?

Die Quotientenregel wendet man an,
wenn man einen Bruch ableiten soll,
der oben und unten „x“ enthält.

$$f(x) = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

→A.13.05

Wann wendet man die Kettenregel
für die Ableitung an ?

Was besagt sie ?

Die Kettenregel wendet man an,
wenn man verkettete (bzw. verschachtelte)
Funktionen ableiten muss.

(z.B: $5\cdot(2x-3)^4$ oder $-2\cdot\sin(3x)$ oder $4e^{1-2x}$ ...)

Sie besagt, dass die innere Ableitung
noch hinten drangehängt werden muss.

$f(x) = 5\cdot(2x-3)^4 \quad\rightarrow\quad f'(x) = 5\cdot4\cdot(2x-3)^3\cdot2$

$g(x) = -2\cdot\sin(3x) \quad\rightarrow\quad g'(x) = -2\cdot\cos(3x)\cdot3$

$h(x) = 4e^{1-2x} \quad\rightarrow\quad h'(x) = 4\cdot e^{1-2x}\cdot(-2)$

→A.13.03

Wann wendet man die Kettenregel
für die Stammfunktion an ?
(lineare Substitution)

Was besagt sie ?

Die Kettenregel wendet man an,
wenn man verkettete (bzw. verschachtelte)
Funktionen integrieren muss.
(z.B: $5\cdot(2x-3)^4$ oder $-2\cdot\sin(3x)$ oder $4e^{1-2x}$ ...)

Sie besagt, dass die innere Ableitung
noch hinten drangehängt werden muss.

$f(x) = 5\cdot(2x-3)^4 \quad\rightarrow\quad F(x) = \frac{5}{5}\cdot(2x-3)^5\cdot\frac{1}{\mathbf{2}}$

$g(x) = -2\cdot\sin(3x) \quad\rightarrow\quad G(x) = -\frac{2}{\mathbf{3}}\cdot\sin(3x)$

$h(x) = 4e^{1-2x} \quad\rightarrow\quad H(x) = \frac{4}{\mathbf{-2}}\cdot e^{1-2x}$

→A.14.03

Wann wendet man die Produktintegration
(partielle Integration) an ?

Wie lautet sie ?

Die Produktregel wendet man an,
wenn man ein Produkt integrieren soll.

$$f(x) = u' \cdot v \qquad \Rightarrow \qquad F(x) = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$$

→A.14.05

Woran erkennt man, ob eine Funktion
monoton fallend oder
monoton steigend ist ?

Eine Funktion ist monoton steigend, wenn die erste Ableitung (die Steigung) positiv ist.

Die Funktion ist fallend, wenn f'(x) negativ ist.

(Oft reicht auch eine Betrachtung der Hoch- und Tiefpunkte von f(x). Zwischen HP und TP ist eine Funktion immer entweder monoton fallend oder monoton steigend).

→A.11.07

Woran erkennt man, ob eine Funktion
eine Links- oder Rechtskurve ist ?

Eine Funktion ist in jenem Bereich
eine Linkskurve, in welchem die
zweite Ableitung positiv ist.

Die Funktion ist eine Rechtskurve,
wenn $f''(x)$ negativ ist.

(Oft ist hilfreich, wenn man die Wendepunkte kennt.
Die WP sind immer Grenzen zwischen Links- und Rechtskurven).

→A.11.03

Wie berechnet man
senkrechte Asymptoten ?

- Man setzt immer den Nenner Null.
  (falls es einen Nenner gibt)
- Falls es eine Logarithmusfunktion ist,
  setzt man das Argument Null.

Bemerkung

- Der Nenner ist der Term *unter´* m Bruchstrich.
- Gibt es keinen Nenner und keinen Logarithmus,
  gibt es keine Asymptoten.

→A.16.02, →A.43.06, →A.44.06

Welche Funktionen besitzen
waagerechte oder schiefe
Asymptoten ?

Wie erhält man diese Asymptoten ?

Waagerechte oder schiefe Asymptoten
gibt es bei e-Funktionen oder
bei Bruch–Funktionen.

Man erhält sie indem man
x gegen $\pm\infty$ laufen lässt.
(Wie das im Detail geht,
hängt vom Funktionstyp ab.)

→A.41.07, →A.41.08, →A.43.07

Wie bestimmt man
waagerechte oder schiefe Asymptoten
bei gebrochen-rationalen Funktionen ?

Im „Schnellverfahren“:

Man vergleicht höchste Potenzen oben und unten. Dabei unterscheidet man vier Fälle.

(Diese Methode gilt normalerweise *nicht* als Beweis).

Der Beweis:

Man klammert oben und unten die höchste Potenz aus, kürzt und lässt $x \to \pm\infty$ gehen, so dass einige Terme gegen Null gehen.

→A.43.06, →A.43.07

Wie bestimmt man
waagerechte oder schiefe
Asymptoten bei e-Funktionen?

Im „Schnellverfahren“:

Man lässt den e-Term weg und alles was mit „mal“ verbunden ist. Was übrig bleibt ist die waagerechte oder schiefe Asymptote.

(Diese Methode stimmt leider nicht immer und gilt eigentlich *nie* als Beweis).

Der Beweis:

Man lässt $x \to \pm\infty$ gehen.

(Man benötigt: $e^{\infty} \to \infty$ und $e^{-\infty} \to 0$)

→A.41.07, →A.41.08

Auf was für Informationstypen
muss man beim Aufstellen
von Funktionen achten?

Der x-Wert, um welchen es geht, ist meist gegeben. Ansonsten gibt drei Typen von Informationen, nach welchen man die Aufgabe gezielt durchsucht.

- Ein y-Wert ist gegeben. y-Werte erhält man aus f(x), daher setzt man in f(x)=y den x- und y-Wert ein.
- Eine Steigung ist gegeben. Steigungen erhält man aus f'(x), daher setzt man in f'(x)=m den x-Wert und die Steigung ein.
- Ein Punkt ist ein Hoch- Tief- oder Wendepunkt. Man setzt entweder f'(x)=0 oder f''(x)=0.
  (Je nachdem ob´s ein Extrempunkt oder Wendepunkt ist.)

→A.46.05

Wie geht man bei
Extremwertaufgaben vor?

Bei Extemwertaufgaben muss irgendetwas maximal oder minimal werden (meist geht's um Flächen oder Längen).
Ein Punkt der Aufgabe ist fast immer P(u|f(u)).

Was maximiert/minimiert werden soll, steht meist am Ende der Aufgabe. Die Formel davon aus der Formelsammlung herausschreiben.

Nun versucht man alle Größen, die in der Formel auftauchen, nach und nach durch „u" oder „f(u)" oder Ähnliches zu ersetzen.

Hat man in der Formel nur noch eine einzige Variable, kann man Ableiten und die Ableitung Null setzen
oder falls es erlaubt ist, das Maximum / Minimum mit dem Taschenrechner bestimmen.

→A.21

Wie bestimmt man den
(größten/kleinsten) Abstand
zwischen zwei Funktionen?

Den Abstand zwischen zwei Funktionen bestimmt man über:

$$d(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{(oder } d(u)=f(u)-g(u)\text{)}$$

Geht's um den minimalen/maximalen Abstand, muss man von $d(x)$ noch das Extremum bestimmen.
($d'(x)=0$ oder Min/Max mit dem GTR/CAS bestimmen)

→A.21.06

Wie bestimmt man jenen Kurvenpunkt,
der von einem vorgegebenen Punkt den
kleinsten/größten Abstand hat ?

Fast alle dieser Aufgaben sind nur mit dem GTR oder CAS lösbar.

Man führt das Problem auf „Abstand Punkt-Punkt“ zurück.

Annahme der gegebene Punkt sei A(2|3).
Der unbekannte Kurvenpunkt ist P(u|f(u)).

Der Abstand beider Punkte ist nun:

$$d(u)=\sqrt{(u-2)^2+(f(u)-3)^2}$$

Von d(u) bestimmt man das Maximum
(Die Wurzel mit Kettenregel ableiten oder
mit GTR/CAS bestimmen, falls das erlaubt ist.)

(Unter A.21.07 ist auch ein anderer Weg aufgezeichnet)

→A.21.07, →A.21.08

Wie bestimmt man die maximale
Steigung einer Funktion ?

Die größte oder kleinste Steigung
befindet sich immer im Wendepunkt.

Man setzt $f''(x)=0$

oder

falls ein GTR/CAS erlaubt ist, zeichnet man das Schaubild von $f'(x)$ und bestimmt davon das Maximum.

Wie bestimmt man den Durchschnittswert (Mittelwert, durchschnittlichen y-Wert) einer Funktion in einem Intervall I[a;b] ?

Den Mittelwert oder Durchschnitt einer Funktion f(x) berechnet man mit der „Mittelwertformel".

$$m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx$$

→A.18.07

Wie bestimmt man das Volumen eines Rotationskörpers, der bei Rotation einer Fläche um die x-Achse entsteht ?

Falls eine Fläche zwischen Funktion f(x) und x-Achse um die x-Achse rotiert, gilt:

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b \left(f(x)\right)^2 \, dx$$

Falls eine Fläche zwischen zwei Funktionen f(x) und g(x) um die x-Achse rotiert, gilt:

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b \left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2 \, dx$$

→A.18.06

Wie bestimmt man Ortskurven von
Hoch-, Tief-, Wendepunkten, … ?

Ortskurven gibt es nur bei Kurvenscharen.
(Also Funktionen mit Parameter drin)

Zuerst bestimmt man die Koordinaten des Hoch- oder Tief- oder Wendepunkts..

Nun löst man in der Gleichung vom x-Wert des Punktes nach dem Parameter (t?) auf und setzt dieses in die Gleichung vom y-Wert ein. Man erhält die Ortskurve.

→A.24.01

Was ist eine Differentialgleichung?
Wozu verwendet man sie ?

Eine Differentialgleichung (=DGL) ist eine
Gleichung, in welcher $f(x)$ und $f'(x)$ vorkommen.
Sie liefert einen Zusammenhang zwischen
der Änderung des Bestands und dem Bestand.

Man kann die DGL aufstellen, wenn ein Zusammenhang
zwischen Zu-/Abnahme und Bestand gegeben ist.
(Man erhält meist den Wert für „k“, evtl auch die Grenze „G“.)

Desweiteren verwendet man die DGL,
um zu zeigen, dass eine Funktion den
angegebenen Wachstumsvorgang beschreibt.
(Man setzt $f(x)$ und $f'(x)$ in die DGL ein und
muss eine wahre Aussage erhalten.)

→A.30.02

Wie kann man aus der Aufgabenstellung recht schnell erkennen, dass man es mit exponentiellem Wachstum zu tun hat?

Wie lautet die Funktionsgleichung von exponentiellem Wachstum?

Wie lautet die Differentialgleichung vom exponentiellem Wachstum?

Beim exponentiellem Wachstum beträgt die Zu- bzw. Abnahme immer einen bestimmten prozentualen Anteil vom Bestand.
Der Bestand nähert sich langfristig dem Wert Null oder er geht gegen Unendlich.

Die Funktionsgleichung: $f(t) = a \cdot e^{kt}$

Die Differentialgleichung: $f'(t) = k \cdot f(t)$

(a = Anfangswert, $f(t)$ = Bestand, $f'(t)$ = Zunahme/Abnahme)

→A.30.03, →A.30.04

Wie kann man aus der Aufgabenstellung recht schnell erkennen, dass man es mit begrenztem Wachstum zu tun hat?

Wie lautet die Funktionsgleichung von begrenztem Wachstum?

Wie lautet die Differentialgleichung vom begrenztem Wachstum?

Das begrenzte (beschränktes) Wachstum nimmt immer um einen bestimmten, konstanten Wert zu und gleichzeitig um einen prozentualen Anteil des Bestands ab.
Der Bestand nähert sich langfristig irgendeiner Grenze (Schranke).

Die Funktionsgleichung: $f(t) = G + a \cdot e^{-kt}$

(es sind auch noch andere Funktionsgleichungen möglich)

Die Differentialgleichung: $f'(t) = k \cdot [G - f(t)]$

(G=Grenze/Schranke,
a, k = irgendwelche Zahlen ohne anschauliche Bedeutung
f(t)=Bestand, f´(t)=Zunahme/Abnahme)

→A.30.05, →A.30.06

Wie kann man aus der Aufgabenstellung recht schnell erkennen, dass man es mit logistischem Wachstum zu tun hat?

Wie lautet eine Funktionsgleichung von logistischem Wachstum?

Wie lautet die Differentialgleichung vom logistischem Wachstum?

Das logistische Wachstum wächst am Anfang langsam (exponentiell), dann schneller und nähert sich irgendwann man einer Grenze G an (am Schluss also begrenztes Wachstum).

Die Funktionsgleichung: $f(t) = \frac{a \cdot G}{a + e^{-k \cdot G \cdot t}}$

(Es gibt noch andere Möglichkeiten)

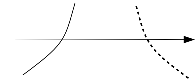
Die Differentialgleichung: $f'(t) = k \cdot f(t) \cdot [G - f(t)]$

(G=Grenze/Schranke,
a, k = irgendwelche Zahlen ohne anschauliche Bedeutung
f(t)=Bestand, f'(t)=Zunahme/Abnahme)

→A.30.07, →A.30.08

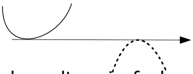
Wie erkennt man einfache, doppelte, dreifache Nullstellen ?

Einfache Nullstellen schneiden die x-Achse.



einfache Nullstelle

Doppelte, vierfache, … Nullstellen be-
rühren die x-Achse in einem Hoch-
oder Tiefpunkt.
In der Funktionsgleichung tauchen
sie als Klammer mit gerader
Hochzahl auf. (z.B. $(x-2)^2$, x^4)



doppelte, vierfache, ..
N.St.

Dreifache, fünffache, … Nullstellen be-
rühren die x-Achse in einem Sattel-
punkt. In der Funktionsgleichung
tauchen sie als Klammer mit ungerader
Hochzahl auf. (z.B. $(x-1)^3$, $(x+3)^5$)

dreifache, fünffache, ..
N.St.

→A.46.04

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Schaubild einer Funktion und deren Ableitung ?

$f(x)$	**$f'(x)$**
N	keine Aussage
H	$N_{+ \to -}$
T	$N_{- \to +}$
W	H oder T
SP	$N_{+ \to +}$ oder $N_{- \to -}$
steigend	oberhalb der x-Achse
fallend	unterhalb der x-Achse

N = Nullstelle

H = Hochpunkt

T = Tiefpunkt

W = Wendepunkt

SP = Sattelpunkt, Treppenpunkt

$N_{+ \to -}$ = Nullst. mit Vorzeichenwechsel von + nach –

→A.27.03, →A.27.04

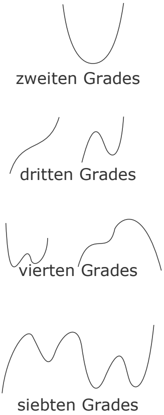
Wie sehen Schaubilder von Polynomen aus ?

Polynome oder ganzrationale Funktionen
sind Parabeln (evtl. höherer Ordnung).

Sie haben keine Asymptoten
und keine Definitionslücken.

Üblicherweise haben sie einen Extrempunkt weniger als ihre höchste Potenz.

(Noch weniger Extrema sind möglich,
mehr Extrema sind nie möglich)

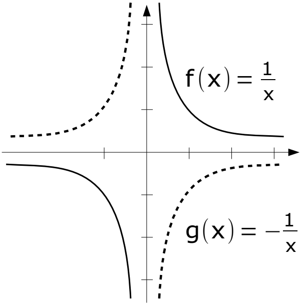


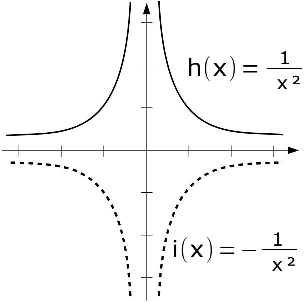
→A.46.06

Wie sieht das Schaubild der

Hyperbel $f(x) = \frac{1}{x}$ aus?

Wie können andere
Hyperbeln aussehen ?





→A.27.01, →A.43.08

Schaubilder

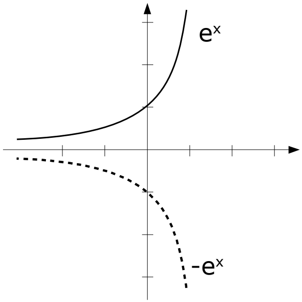
Skizzieren Sie die Schaubilder von:

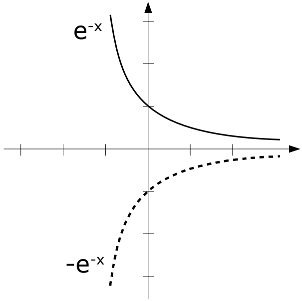
a) e^x

b) $-e^x$

c) e^{-x}

d) $-e^{-x}$

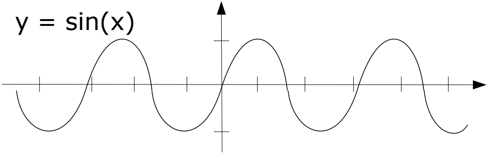


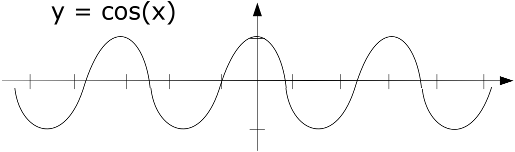


→A.27.01, →A.41.09

Skizzieren Sie die Schaubilder von:

$y = \sin(x)$ und $y = \cos(x)$





→A.27.01, →A.42.09

Welche Bedeutung haben die Parameter a, b, c und d bei trigonometrischen Funktionen ?

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x-c))+d$$

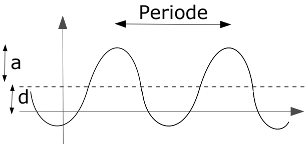
$$f(x) = a \cdot \cos(b(x-c))+d$$

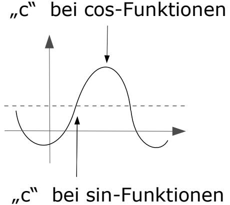
d = Mittellinie,
Verschiebung in y-Richtung

a = Amplitude,
Abstand von der Mittellinie
ganz hoch oder ganz runter

b = gibt Streckung in x-Richtung an
Periode $= \frac{2\pi}{b}$

c = Verschiebung in x-Richtung.
Bei sin-Funktionen ist c der
x-Wert des Wendepunkts
mit positiver Steigung
Bei cos-Funktionen ist c der
x-Wert des Hochpunkts





→A.42.08

An welchen typischen
Eigenschaften erkennt man
e-Funktionen in Schaubildern ?

e-Funktionen haben üblicherweise nur auf einer Seite eine waagerechte Asymptote (also nur links oder nur rechts).

Auf der anderen Seite gehen sie nach $+\infty$ oder $-\infty$.

Senkrechte Asymptoten gibt es (normalerweise) nicht.

→A.41.07

An welchen typischen
Eigenschaften erkennt man
gebrochen-rationale Funktionen
in Schaubildern ?

Charakteristisch für gebrochen-rationale Funktionen sind die senkrechten Asymptoten!

(die Funktion ist also „zwei-“ oder „mehrteilig“)

→A.43.06

Wie geht man vor, um
gebrochen-rationale Funktionen
zu bestimmen ?

Meist funktioniert folgende Vorgehensweise:

1. Man fängt mit dem Nenner an, welcher durch die senkrechten Asymptoten angegeben wird. Oben in den Nenner wird ein „a" geschrieben.

2. Man hängt die waagerechten oder schiefen Asymptoten hinter den Bruch.

3. Man setzt die Koordinaten irgendeines Punkts des Schaubilds, den man gut ablesen kann, in die Funktion für x und y ein und erhält „a".

→A.42.10

Wie beweist man lineare (Un)Abhängigkeit von Vektoren ?

Annahme, es geht um die Vektoren: $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$

Man schreibt vor jeden Vektor einen Parameter, addiert alles und setzt alles Null.

Das entstehende LGS (jede Zeile ist eine Gleichung) löst man und schaut, was als Lösung rauskommt.

$$x_1 \cdot \left(\vec{a}\right) + x_2 \cdot \left(\vec{b}\right) + x_3 \cdot \left(\vec{c}\right) = 0$$

Erhält man: $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$,

sind die Vektoren unabhängig.

In jedem anderen Fall sind sie abhängig.

→V.10.01

Was ist eine Linearkombination
von Vektoren ?

Wie prüft man, ob ein gegebener
Vektor eine Linearkombination
von irgendwelchen anderen ist?

Eine Linearkombination von Vektoren erhält man, wenn man vor jeden Vektor einen Parameter setzt und dann alles addiert.

Wenn man beispielsweise zeigen soll, dass $\vec{c}$ eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sein soll, stellt man die Gleichung auf:

$$x_1 \cdot \left(\vec{a}\right) + x_2 \cdot \left(\vec{b}\right) = \left(\vec{c}\right)$$

und prüft, ob das entstehende LGS lösbar ist.

→V.10.01

Gegeben sind die Koordinaten von drei Eckpunkten A, B, C eines Dreiecks.

Wie zeigt man, dass das Dreieck ΔABC gleichschenklig ist?

Wie zeigt man, dass das Dreieck ΔABC rechtwinklig ist?

Gleichschenklig:
Man berechnet die Längen der Seiten AB, AC und BC (Abstand Punkt-Punkt). Zwei der Längen müssen gleich sein, die dritte sollte unterschiedlich sein.

Rechtwinklig:
Erste Möglichkeit ist, zu prüfen, ob der Satz von Pythagoras im Dreieck stimmt. (Diese Möglichkeit geht sehr schnell, wenn man die Seitenlängen bereits berechnet hat).
Zweite Möglichkeit wäre zu prüfen, ob das Skalarprodukt von zwei Vektoren Null gibt.

Gegeben sind die Koordinaten
dreier Punkte A, B, C.

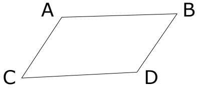
Wie bestimmt man den vierten Punkt D
so, dass ABCD ein Parallelogramm ist?
(oder ein Raute, ein Rechteck, ein Quadrat)

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB}$$

oder

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC}$$

oder...



→V.05.04

Wie berechnet man das *Skalarprodukt* von zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$?

Wie berechnet man das *Kreuzprodukt* (Vektorprodukt) von zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$?

Sei $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ und sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Skalarprodukt: $\vec{u} \circ \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$

Kreuzprodukt: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \cdot z - c \cdot y \\ c \cdot x - a \cdot z \\ a \cdot y - b \cdot x \end{pmatrix}$

Merkhilfe für´s Kreuzprodukt: $\begin{array}{cc} a & x \\ b & y \\ c & z \\ a & x \\ b & y \\ c & z \end{array}$

→V.05.02, →V.05.03

Wie stellt man eine Gerade aus zwei gegebenen Punkten auf?

Als Stützvektor nimmt man einen der Punkte.

Den Richtungsvektor erhält man, indem man beide Punkte voneinander abzieht.

$$g \; : \; \vec{x} = \left(\vec{a}\right) + r \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$

→V.01.03

Wie stellt man eine Ebene auf, wenn man:

a) drei Punkte A, B und C gegeben hat ?

b) einen Punkt A und eine Gerade gegeben hat ?

$$g \;:\; \vec{x} = \left(\vec{u}\right) + r\cdot\left(\vec{v}\right)$$

a) Als Stützvektor nimmt man einen der Punkte.
Die beiden Richtungsvektor erhält man, indem man jeweils zwei Punkte voneinander abzieht.

$$E: \vec{x} = (\vec{a}) + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + s \cdot (\vec{c} - \vec{a})$$

b) Als Stützvektor nimmt man A oder den Stützvektor der Gerade.
Einen Richtungsvektor übernimmt man von der Gerade, den anderen erhält man, indem man den Punkt A und den Stützvektor der Gerade verrechnet.

$$E: \vec{x} = (\vec{u}) + r \cdot (\vec{v}) + s \cdot (\vec{u} - \vec{a})$$

→V.01.05

Wie stellt man eine Ebene auf, wenn man:

c) zwei sich schneidende Geraden gegeben hat?
$g: \vec{x} = \vec{u} + r \cdot \vec{v} \qquad h: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$

d) zwei parallele Geraden gegeben hat ?
$g: \vec{x} = \vec{u} + r \cdot \vec{v} \qquad h: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$

c) Als Stützvektor nimmt man einen der beiden Stützvektoren der Geraden. Die beiden Richtungsvektoren entnimmt man den Geraden.

$E: \vec{x} = \vec{u} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{b}$

d) Als Stützvektor nimmt man einen der beiden Stützvektoren der Geraden. Einen Richtungsvektor kann man von einer der Geraden entnehmen. Den zweiten Richtungsvektor erhält man, indem man die beiden Stützvektoren der Geraden verrechnet.

$E: \vec{x} = \vec{u} + r \cdot \vec{v} + s \cdot (\vec{u} - \vec{a})$

→V.01.05

Was für Ebenenformen gibt es ?

Es gibt die

- Parametergleichung $E: \vec{x} = \left(\vec{a}\right) + r \cdot \left(\vec{u}\right) + s \cdot \left(\vec{v}\right)$
- Koordinatengleichung $E: n_1 \cdot x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$
- Normalengleichung $E: \left(\vec{n}\right) \circ \left[\vec{x} - \left(\vec{p}\right)\right] = 0$
- Hesse-Normal-Form (für Abstand Punkt-Ebene)
- Achsen-Abschnitts-Form (nicht sehr wichtig)

→V.01.04

Wie wandelt man die Parameterform einer Ebene in Koordinatenform um ?

Wie wandelt man die Koordinatenform einer Ebene in Parameterform um ?

PF → KF:
Zuerst braucht man den Normalenvektor.
Diesen erhält man entweder über das Skalarprodukt der beiden Richtungsvektoren oder über das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren.
Nun hat man die linke Seite der Koordinatenform.
Die rechte Seite (die Zahl) erhält man durch Einsetzen des Stützvektors.

KF → PF:
Man nimmt drei Punkte der Ebene (z.B. die Spurpunkte) und stellt daraus die Parameterform auf.
($E: \vec{x} = (\vec{a}) + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + s \cdot (\vec{c} - \vec{a})$)

→V.01.06, →V.01.07

Wie berechnet man Spurpunkte einer Ebene ?

Wie berechnet man Spurgeraden einer Ebene ?
Wie zeichnet man Spurgeraden ein ?

Spurpunkte:
Die Spurpunkte haben die Form:
$S_1(x_1|0|0)$, $S_2(0|x_2|0)$,$S_3(0|0|x_3)$
Diese setzt man nacheinander in die Koordinatenform der Ebene ein und erhält so x_1, x_2 und x_3.

Spurgeraden:
Man zeichnet Spurgeraden am einfachsten ein, indem man die Spurpunkte verbindet.
Man berechnet zuerst die Spurpunkte und stellt aus je zweien eine Gerade auf.

→V.01.10

Wie veranschaulicht man eine
Ebene im Koordinatensystem ?

Ebenen „veranschaulichen“ bedeutet „zeichnen“.
Man berechnet die Spurpunkte und verbindet diese.
(Falls alle drei Spurpunkte existieren, entsteht ein Dreieck)

→V.01.11

Welche möglichen Lagen können
zwei Geraden zueinander haben ?

identisch:
beide Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander und Gleichsetzen der Geraden liefert unendlich viele Lösungen.

parallel (und verschieden):
beide Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander und Gleichsetzen der Geraden liefert keine Lösung.

Schnittpunkt:
die Richtungsvektoren sind keine Vielfache voneinander und Gleichsetzen der Geraden liefert eine Lösung.

windschief:
die Richtungsvektoren sind keine Vielfache voneinander und Gleichsetzen der Geraden liefert keine Lösung.

→V.02.01

Welche gegenseitige Lage können
eine Gerade und eine Ebene haben ?

g liegt in E:
Schnittpunktberechnung liefert unendlich viele Lösungen.

parallel (und verschieden):
Schnittpunktberechnung liefert keine Lösung.

Schnittpunkt:
Schnittpunktberechnung liefert eine Lösung.

→V.02.02

Welche gegenseitige Lage können
zwei Ebenen zueinander haben ?

Man betrachtet die Koordinatengleichungen:

identisch:
beide Normalenvektoren sind Vielfache, die beiden freien Zahlen (stehen meist auf der rechten Seite, ohne x_1, x_2, x_3) sind die gleichen Vielfachen.

parallel (und verschieden):
beide Normalenvektoren sind Vielfache, die beiden freien Zahlen (stehen meist auf der rechten Seite, ohne x_1, x_2, x_3) sind nicht die gleichen Vielfachen.

Schnittgerade:
Die beiden Normalenvektoren sind keine Vielfache.

→V.02.03

Wie prüft man, ob ein Punkt auf
einer Gerade oder einer Ebene liegt ?

Durch eine Punktprobe.

Bei einer Geraden oder einer Ebene in *Parameterform* bedeutet das im Prinzip, dass man den Punkt mit der Geraden- oder Ebenengleichung gleichsetzt und schaut ob man einen Widerspruch oder nur wahre Aussagen erhält.

Bei einer Ebene in *Koordinatenform* setzt man einfach die Koordinaten des Punktes für x_1, x_2 und x_3 ein.

Wie berechnet man den
Schnittpunkt von zwei Geraden ?

Man setzt die beiden Geraden gleich,
jede der drei Zeilen liefert eine Gleichung.
Aus zwei der drei Gleichungen berechnet man die beiden Parameter. Die dritte Gleichung verwendet man nur für die Probe.

Erhält man in der Probe eine wahre Aussage, schneiden sich die Geraden. Den Schnittpunkt erhält man, indem man einen der Parameter wieder in die Gerade einsetzt.

Liefert die Probe einen Widerspruch, gibt es keinen Schnittpunkt.

→V.02.01

Wie berechnet man den Schnittpunkt
einer Ebene mit einer Gerade ?

Am einfachsten geht das, wenn die Ebene in Koordinatengleichung gegeben ist.
Man setzt die Gerade für x_1, x_2, x_3 der Ebene ein, löst nach dem Parameter auf und setzt den erhaltenen Wert wieder in die Gerade ein.

→V.02.02

Wie berechnet man die
Schnittgerade von zwei Ebenen ?

Sind beide Ebenen in Koordinatenform gegeben, schreibt man beide Gleichung untereinander und elimiert x_1, x_2 oder x_3. In der erhaltenen Gleichung wählt man x_3=t (oder x_2=t) und löst nach den anderen $x_?$ auf. Schreibt man nun x_1, x_2 und x_3 übereinander steht eigentlich schon die Schnittgerade da.

Hat man eine Ebene in Koordinatenform gegeben und die andere in Parameterform, setzt man die Parametergleichung in die Koordinatengleichung auf und löst nach einem der Parameter auf. Diesen setzt man wieder in Parametergleichung ein und erhält so eine Geradengleichung.

→V.02.03

Wie berechnet man den
Abstand zweier Punkte ?

Annahme, die beiden Punkte heißen
$A(x_{1A}|x_{2A}|x_{3A})$ und $B(x_{1B}|x_{2B}|x_{3B})$.

Der Abstand beider Punkte berechnet sich über:

$$d(A,B)=\sqrt{(x_{1A}-x_{1B})^2+(x_{2A}-x_{2B})^2+(x_{3A}-x_{3B})^2}$$

→V.03.01

Wie berechnet man den Abstand
eines Punktes P zu einer Gerade g ?

Es gibt mehrere Möglichkeiten.

Eine davon geht über die Lotebene (Hilfsebene).
Der Richtungsvektor der Gerade g ist der Normalenvektor der Lotebene und der Punkt P ist ein Stützvektor. Damit kann man sehr schnell die Koordinatengleichung der Lotebene aufstellen. Diese Ebene schneidet man mit der Geraden g und erhält als Schnittpunkt den Lotfußpunkt L. Der Abstand von L zu P ist der gesuchte Abstand von P zur Geraden g.

→V.03.02, →V.03.03, →V.03.04, →V.03.05

Wie berechnet man den Abstand
eines Punktes zu einer Ebene ?

Die schnellste Möglichkeiten geht über die HNF. Man stellt die HNF der Ebene auf und setzt den Punkt ein.

Falls man den Lotfußpunkt braucht, stellt man eine Lotgerade auf. (Der Richtungsvektor der Lotgerade ist der Normalenvektor der Ebene, der Punkt P ist der Stützvektor der Lotgerade). Diese Lotgerade schneidet man mit der Ebene und erhält als Schnittpunkt den Lotfußpunkt L. Der Abstand von L zu P ist der gesuchte Abstand von P zur Geraden g.

→V.03.06, →V.03.07

Wie berechnet man den
Abstand zweier Geraden ?

Wenn die beiden Geraden *parallel* sind, nimmt man den Stützvektor der einen Geraden und berechnet den Abstand von diesem Punkt zur anderen Gerade (→Abstand Punkt-Gerade).

Sind die Geraden *windschief*, so verwendet man am besten die Formel: $d = \left(\vec{n}_0\right) \circ \left(\vec{p} - \vec{q}\right)$

Hierbei sind $\vec{p}$ und $\vec{q}$ die Stützvektoren der beiden Geraden, $\vec{n}_0$ ist der Einheitsnormalenvektor. (Man bestimmt also zuerst den Normalenvektor aus den beiden Richtungsvektoren der Geraden und teilt dann durch den Betrag des Normalenvektors: $\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \left(\vec{n}\right)$)

→V.03.08, →V.03.09, →V.03.10

Wie berechnet man den Abstand
einer Gerade zu einer Ebene ?

Wie berechnet man den
Abstand zweier Ebenen ?

Abstand Gerade-Ebene
macht nur Sinn, wenn die beiden parallel sind. In dem Fall nimmt man den Stützvektor der Gerade und berechnet den Abstand von diesem Punkt zur Ebene (→Abstand Punkt-Ebene).

Abstand Ebene-Ebene
macht nur Sinn, wenn die beiden parallel sind. In dem Fall nimmt man einen beliebigen Punkt der einen Ebene (z.B. einen Spurpunkt) und berechnet den Abstand von diesem Punkt zur anderen Ebene (→Abstand Punkt-Ebene).

→V.03.08

Wie zeigt man, dass zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen ?

Wie zeigt man, dass zwei Geraden senkrecht aufeinander stehen ?

Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt.

Zwei Geraden stehen senkrecht aufeinander, wenn das Skalarprodukt ihrer beiden Richtungsvektoren Null ergibt.
(Oder der Schnittwinkel 90° ergibt.)

→V.05.01, →V.05.02

Wie zeigt man, dass eine Gerade und eine Ebene senkrecht aufeinander stehen ?

Eine Gerade und eine Ebene stehen senkrecht aufeinander, wenn der Normalenvektor der Ebene ein Vielfaches vom Richtungsvektor der Geraden ist. (Oder der Schnittwinkel 90° ergibt.)

Wie zeigt man, dass zwei Ebenen senkrecht aufeinander stehen ?

Zwei Ebenen stehen senkrecht aufeinander, wenn das Skalarprodukt ihrer beiden Normalenvektoren Null ergibt.

(Oder der Schnittwinkel 90° ergibt.)

→V.05.01, →V.05.02

Wie berechnet man den Schnittwinkel

→ zwischen zwei Geraden

→ zwischen Gerade und Ebene

→ zwischen zwei Ebenen ?

Den Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene berechnet man mit der Formel:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Den Schnittwinkel zwischen zwei Geraden oder zwei Ebenen berechnet man mit der Formel:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

In den Formeln verwendet man von Geraden immer die Richtungsvektoren, von Ebenen immer die Normalenvektoren.

→V.05.01

Wie berechnet den Innenwinkel
von Dreiecken und Vierecken ?

Man verwendet die ganz normale Winkelformel, jedoch steht oben kein Betrag und man muss aufpassen, mit den verwendeten Vektoren immer vom Eckpunkt weg zu gehen. (Bei der Berechnung von α verwendet man die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$, keinesfalls jedoch $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CA}$)

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$$

→V.05.01

Wie berechnet man den Lotfußpunkt
eines Punktes auf eine Gerade ?

Man stellt eine Lotebene auf.

(Der Normalenvektor der Lotebene ist der Richtungsvektor der Gerade, damit hat man die linke Seite der Koordinatengleichung.
Den Punkt setzt man in die Koordinatengleichung ein und erhält die freie Zahl [rechte Seite] der Koordinatengleichung.)

Diese Lotebene schneidet man mit der Gerade und erhält als Schnittpunkt den Lotfußpunkt.

(Wie bei Abstand Punkt-Gerade !)

(Es gibt auch noch andere Möglichkeiten.)

Wie berechnet man den Lotfußpunkt
eines Punktes auf eine Ebene ?

Man stellt eine Lotgerade auf.

(Der Richtungsvektor der Lotgerade ist der Normalenvektor der Ebene, der Punkt P ist der Stützvektor der Lotgerade.)

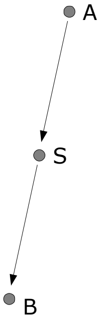
Diese Lotgerade schneidet man mit der Ebene und erhält als Schnittpunkt den Lotfußpunkt L.

(Wie bei Abstand Punkt-Ebene)

Wie spiegelt man einen Punkt
an einem anderen Punkt ?

Annahme, man will den Punkt A an S spiegeln, um den Punkt B zu erhalten: Addiert man zum Punkt A den Vektor $\overrightarrow{AS}$, erhält man den Punkt S. Addiert man den Vektor jedoch zweimal, so landet man in B.

Es gilt also: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AS}$



(Es gibt noch einige andere Möglichkeiten, die auch gut sind)

→V.04.02

Wie spiegelt man einen Punkt P
an einer Geraden g ?

Zuerst bestimmt man den Lotfußpunkt
des Punktes P auf der Gerade g.

Anschließend spiegelt man den Punkt P
am erhaltenen Lotfußpunkt.

→V.04.03

Wie spiegelt man einen Punkt P
an einer Ebene E ?

Zuerst bestimmt man den Lotfußpunkt
des Punktes P auf der Ebene E.

Anschließend spiegelt man den Punkt P
am erhaltenen Lotfußpunkt.

→V.04.04

Wie spiegelt man eine Gerade g an irgendwas ?

(Also an einem Punkt, an einer anderen Gerade oder an einer Ebene)

Um die Spiegelgerade aufzustellen, braucht man zwei Punkte.

Also nimmt man zwei Punkte der Ausgangsgerade (einer wäre der Stützvektor, den anderen erhält man, indem man irgendeinen Wert für den Parameter beim Stützvektor einsetzt) und führt mit diese beiden Punkten nun zwei komplette Punktspiegelung durch. Mit diesen neuen Spiegelpunkten kann man die Spiegelgerade aufstellen.

→V.04.05

Gegeben sei eine Gerade g
und ein Punkt A.

Wie bestimmt man jenen Punkt
der Gerade g, der von A einen
vorgegebenen Abstand haben soll ?

Man schreibt g in Punktform um.
(„Einzelpunktform“ bzw. „laufender Punkt“)
Dadurch erhält man einen Punkt in Abhängigkeit von einem Parameter.
Von diesem Punkt bestimmt man den Abstand zum Punkt A (in Abhängigkeit vom Parameter) und setzt dieses dann gleich dem vorgebenen Abstand.
Die entstehende Gleichung kann man nach dem Parameter auflösen.
Den Parameter setzt man wieder in die Gerade ein und erhält den gesuchten Punkt.

→V.08.03

Gegeben sei eine Gerade g
und eine Ebene E.

Wie bestimmt man jenen Punkt
der Gerade g, der von E einen
vorgegebenen Abstand haben soll ?

Man schreibt g in Punktform um.
(„Einzelpunktform" bzw. „laufender Punkt")
Dadurch erhält man einen Punkt in Abhängigkeit von einem Parameter.
Von diesem Punkt bestimmt man den Abstand zu E (über HNF) (in Abhängigkeit vom Parameter) und setzt dieses dann gleich dem vorgegebenen Abstand.
Die entstehende Gleichung löst man nach dem Parameter auf. Den Parameter setzt man wieder in die Gerade ein und erhält den gesuchten Punkt.

→V.08.02

Welches ist die Definition
einer Wahrscheinlichkeit ?

Die ursprüngliche Definition der Wahrscheinlichkeit geht auf das Verhältnis von gewünschten und gesamten Möglichkeiten zurück.

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Möglichkeiten}}{\text{Anzahl der Gesamtmöglichkeiten}}$$

Wie verrechnet man die
Wahrscheinlichkeiten
innerhalb vom einem Baum?

Innerhalb eines Pfades multipliziert man die Wahrscheinlichkeiten.

Die Wahrscheinlichkeiten von verschiedenen Pfaden addiert man.

→W.13.01

Wenn zwei Ereignisse mit „und“ bzw. mit „oder“ verbunden sind:

In welchem Fall werden die beiden Wahrscheinlichkeiten mit „plus“ und wann werden sie mit „mal“ verbunden?

Bei „und“ werden Wahrscheinlich-
keiten meist mit „mal“ verbunden.

Bei „oder“ werden Wahrscheinlich-
keiten meist mit „plus“ verbunden.

→W.13.01

Auf wieviel unterschiedlichen Arten kann man zwei Gruppen von jeweils ununterscheidbaren (gleich aussehenden) Elementen vertauschen ?

Die Anzahl der Vertauschungsmöglichkeiten berechnet man mit dem Binomialkoeffizient.

(Oben steht die Gesamtanzahl der Elemente, unten steht die Anzahl von einer der Untergruppen.)

Bsp:

Wenn man 6 rote und 9 gelbe Kugeln untereinander vertauschen will, berechnet man die Anzahl mit:

$\binom{15}{6} = \binom{15}{9} = 5005$ Vertauschungsmöglichkeiten

Eingabe im Taschenrechner: 15 nCr 6

→W.12.02

Wahrscheinlichkeit,
Vertauschungsmöglichkeiten:

Auf wieviel unterschiedlichen Arten kann man mehrere Gruppen von jeweils ununterscheidbaren (gleich aussehenden) Elementen vertauschen ?

Über den sogenannten „Multinomialkoeffizienten“.
Oben, im Zähler, steht die Fakultät der Gesamtanzahl,
unten im Nenner stehen die Fakultäten der einzelnen Gruppenanzahl.

Bsp:
Will man 6 rote, 3 gelbe, 4 weiße und 5 blaue Kugeln untereinander vertauschen berechnet man die Anzahl mit:

$\frac{18!}{6!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 5!} = 514.594.080$ Vertauschungsmöglichkeiten

Bemerkung: Der Multinomialkoeffizient ist für's Abitur nicht unbedingt notwendig, kann einem jedoch Arbeit ersparen.

→W.12.03

Auf wieviel unterschiedlichen Arten kann man k Elemente vertauschen, die man aus einer Gruppe von n unterscheidbaren (verschieden aussehenden) Elementen entnimmt ?

a) bei Entnahme mit Zurücklegen
b) bei Entnahme ohne Zurücklegen

Mit Zurücklegen:

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot \ldots}_{\text{„k“ Faktoren}} = n^k \text{ Möglichkeiten}$$

Ohne Zurücklegen:

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{\text{„k“ Faktoren}} \text{ Möglichkeiten}$$

Wenn ein Ereignis zu kompliziert für ein Baumdiagramm ist:
Welche Regel wendet man an bei:

a) Ziehen mit Zurücklegen
b) Ziehen ohne Zurücklegen

a) bei Ziehen mit Zurücklegen:
meistens „Binomialverteilung“.

b) bei Ziehen ohne Zurücklegen:
meistens „hypergeometrische Verteilung“.
(Den Namen müssen Sie nicht kennen, aber die Rechnung mit den Binomialkoeffizienten. Siehe auch nächste Karte.)

→W.16, →W.17

Es gibt mehrere Gruppen von Elementen, von welchen die genaue Stückzahl bekannt ist.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine ganz bestimmte Stückzahl jeder Gruppe entnommen?

Bsp.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit aus 6 roten, 9 gelben und 4 blauen Kugeln genau 3 rote, 2 gelbe und eine blaue Kugeln (ohne Zurücklegen) zu ziehen?

Oben, im Zähler, stehen mehrere Binomialkoeffizienten. In jedem steht oben die Anzahl der Gruppenelemente, unten die Anzahl der zu ziehenden Elemente.
Unten um Nenner steht ein Binomialkoeffizient, der die Gesamtanzahl aller Elemente und die Gesamtanzahl der gezogenen Elemente enthält.

Antwort der Beispielfrage: $\dfrac{\binom{6}{3} \cdot \binom{9}{2} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{19}{6}}$ Möglichkeiten

→W.17

Es gibt zwei Gruppen von Elementen, von welchen die prozentuale Häufigkeit bekannt ist.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird jeder Gruppe eine ganz bestimmte Stückzahl entnommen?

Binomialverteilung! (Wichtig!)

(kann auch „Bernoulli-Verteilung" heißen)

$$B_{n,p}(x=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

n = Gesamtanzahl der Ziehungen,
k = Anzahl der gesuchten Teile
p = Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Teils

Bsp:
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit aus 40% roten und 60% blauen Kugeln bei 12 mal Ziehen genau 3 rote und 9 blaue Kugeln zu ziehen?

Antwort: $P(3r, 9b) = \binom{12}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^9 = 0{,}142$

→W.16

Was ist eine Zufallsvariable ?

Eine Zufallsvariable kann so ziemlich alles sein, so lange es sich dabei um eine Zahl handelt.

z.B. kann eine Zufallsvariable ein Geldgewinn sein, eine Anzahl von gezogenen grünen Kugeln, belegte Parkplätze..

Der Begriff „Zufallsvariable“ taucht meist auf, wenn eine Wahrscheinlichkeitsverteilung und/oder ein Erwartungswert gefragt ist.

Was ist eine
Wahrscheinlichkeitsfunktion
bzw. eine
Wahrscheinlichkeitsverteilung ?

Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. -verteilung ist immer eine Tabelle, in welcher in der ersten Zeile immer alle Werte einer Zufallsvariable stehen (also ein Gewinnbetrag, eine Anzahl von gewünschten Kugeln, Augensumme von Würfeln, ..) und in der unteren Zeile die Wahrscheinlichkeiten von all den auftretenden Werten.

z.B.

X=rote Kugeln	0	1	2	3
P(X)	0,4	0,3	0,2	0,1

→W.15.06

Was ist ein Erwartungswert ?

Wie berechnet man ihn ?

Ein Erwartungswert ist nichts anderes als ein Mittelwert bzw. ein Durchschnitt.
Man stellt die Wahrscheinlichskeitsverteilung auf (Tabelle) und verwendet die Formel:

$$\mathbf{E(x) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \ldots}$$

z.B.

X=rote Kugeln	0	1	2	3
P(X)	0,4	0,3	0,2	0,1

Der Erwartungswert wäre:

$E(x) = 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 = 1$

Im Schnitt wäre also *eine* rote Kugel zu erwarten.

→W.15.07

Wie kann man den
Erwartungswert bei der
Binomialverteilung berechnen?

$$E(x) = n \cdot p$$

→W.16.02

Wie berechnet man die Varianz
einer Verteilung ?

(nicht so arg wichtig)

Für die Varianz sind der Erwartungswert und die Wahrscheinlichkeitsverteilung notwendig.
Die Formel für die Varianz lautet:

$Var = p_1 \cdot (x_1 - E)^2 + p_2 \cdot (x_2 - E)^2 + p_3 \cdot (x_3 - E)^2 + \ldots$

z.B.

X=rote Kugeln	0	1	2	3
P(X)	0,4	0,3	0,2	0,1

$E(x) = 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 = 1$

$Var = 0{,}4 \cdot (0-1)^2 + 0{,}3 \cdot (1-1)^2 + 0{,}2 \cdot (2-1)^2 + 0{,}1 \cdot (3-1)^2 = 1$

→W.11.05, →W.16.03

Wie berechnet man die
Standardabweichung ?

(nicht so arg wichtig)

Die Standardabweichung
ist die Wurzel der Varianz.

→W.11.05, →W.16.03

Wie lautet der Additionssatz ?

Sucht man die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis entweder Bedingung A erfüllen soll oder Bedingung B (oder beides), gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

→W.15.01

Wie überprüft man zwei Ereignisse auf Unabhängigkeit ?

Zwei Ereignisse A und B sind unabhängig, wenn sie folgende Beziehung erfüllen:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

(Stimmt die Gleichung nicht, sind A und B abhängig)

→W.15.02

Wie erkennt man bedingte Wahrscheinlichkeit ?

Wie berechnet man diese ?

Bedingte Wahrscheinlichkeit erkennt man daran, dass man etwas *sicher* weiß. Oft taucht in der Formulierung das Wort „wenn" auf.
Die sichere Information nennt man „Bedingung" und wird mit „B" bezeichnet. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit wird mit A bezeichnet.

Die Formel lautet dann: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Bsp: (ohne Zurücklegen)
Eine Urne enthält die zwei rote und 3 blaue Kugeln.
Mit welcher W.S. ist die zweite gezogene Kugel blau, *wenn* die erste rot war?

$$P_{1.\text{rot}}(2.\text{blau}) = \frac{P(1.\text{rot und } 2.\text{blau})}{P(1.\text{rot})} = \frac{2/5 \cdot 3/4}{2/5} = 0{,}75$$

→W.15.03

Häufige Frage im Abitur, erkennbar an dreimaligem „mindestens“ (oder Synonymen):

Bsp.
Wieviel Personen braucht man wenigstens, damit mit mindestens 80%iger Wahrscheinlichkeit mindestens eine Person im Frühjahr Geburtstag hat?

P(Frühjahr) = $^3/_{12}$ = 0,25 P(nicht Frühjahr) = 0,75

Aufschreiben:

P(mindestens 1 Person) > 0,80

Gegenereignis anwenden:

1 – P(niemand im Frühjahr Geb.) > 0,80

$$1 - \underbrace{0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot \ldots}_{\text{„n" mal}} > 0{,}80$$

$$1 - 0{,}75^n > 0{,}8 \qquad |-1 \quad |:(-1)$$

$$0{,}75^n < 0{,}2 \qquad |\ \ln(\ ) \quad |\ :\ln(0{,}75)$$

$$n > \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}75)} = 5{,}59$$

Man braucht mindestens sechs Personen!

→W.14.05

Wie bestimmt man
Annahme- und Ablehungsbereich
beim
linksseitigen Hypothesentest
(=linksseitiger Signifikanztest)

→ meist taucht das Wort „mindestens“ auf

Nullhypothese: $H_0 : p \geqslant \ldots$

Alternativhypothese: $H_1 : p < \ldots$

→ Ablehnungsbereich: $[0;k]$

Annahmebereich: $[k+1;n]$

→ TR: binomcdf mit n, p, k

k wird rumprobiert [ist irgendwo links von $E(x)=n \cdot p$]

→ Bestimmung von X: $P(x \leqslant k) \leqslant \alpha$.

k ist die größte Zahl, deren Wahrsch. noch unter der Irrtumswahrscheinlichkeit liegt.

Wie bestimmt man
Annahme- und Ablehungsbereich
beim
rechtsseitigen Hypothesentest
(=rechtsseitiger Signifikanztest)

→ meist taucht das Wort „höchstens“ auf
Nullhypothese: H_0 : p⩽…
Alternativhypothese: H_1 : p>…

→ Annahmebereich: [0;k]
Ablehungsbereich: [k+1;n]

→ TR: binomcdf mit n, p, k
k wird rumprobiert [ist irgendwo rechts von $E(x)=n\cdot p$]

→ Bestimmung von k: $P(x \leqslant k) \geqslant 1-\alpha$.
k ist die kleinste Zahl, deren Wahrsch. bereits über 1–Irrtumswahrscheinlichkeit liegt.